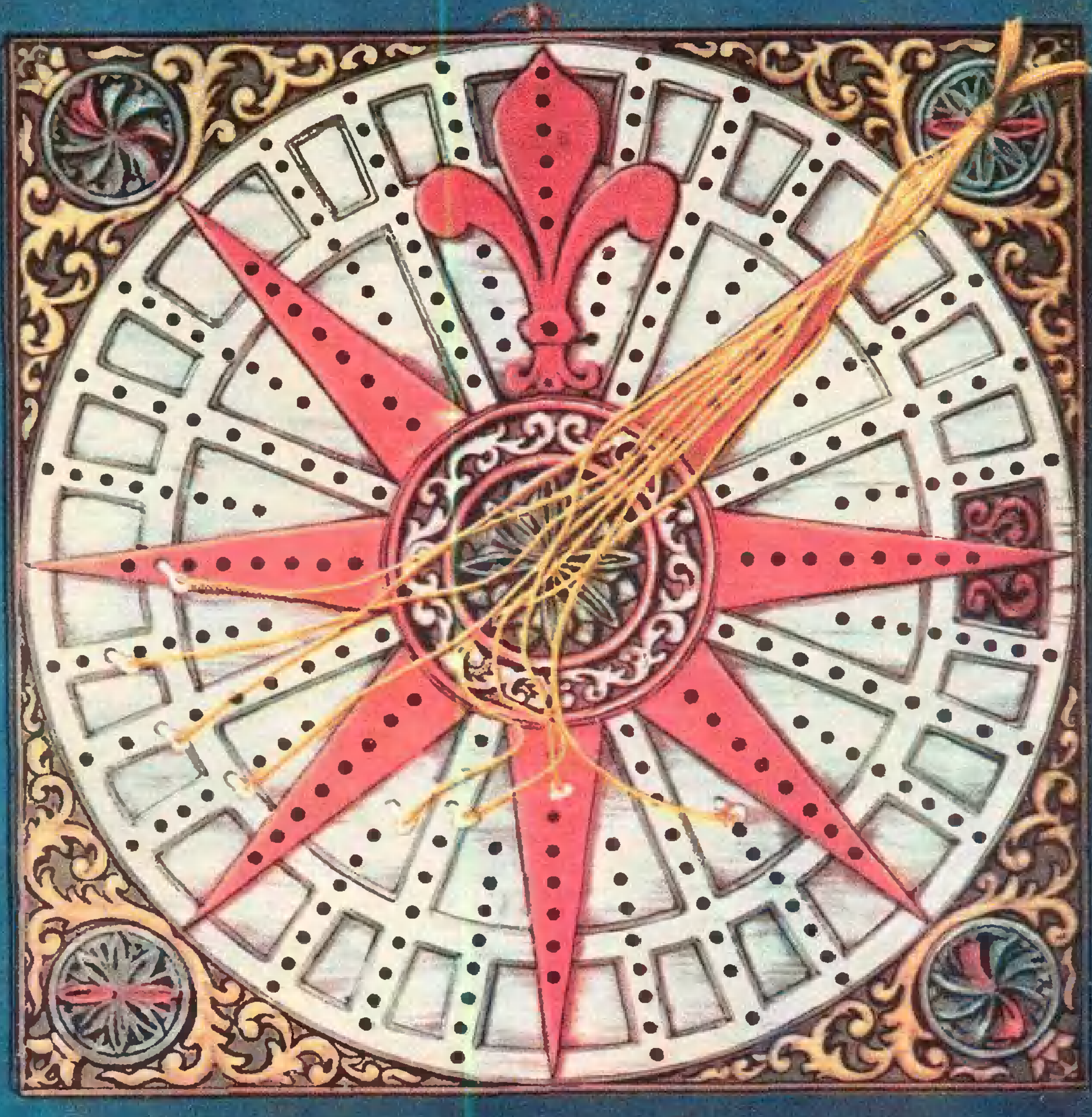
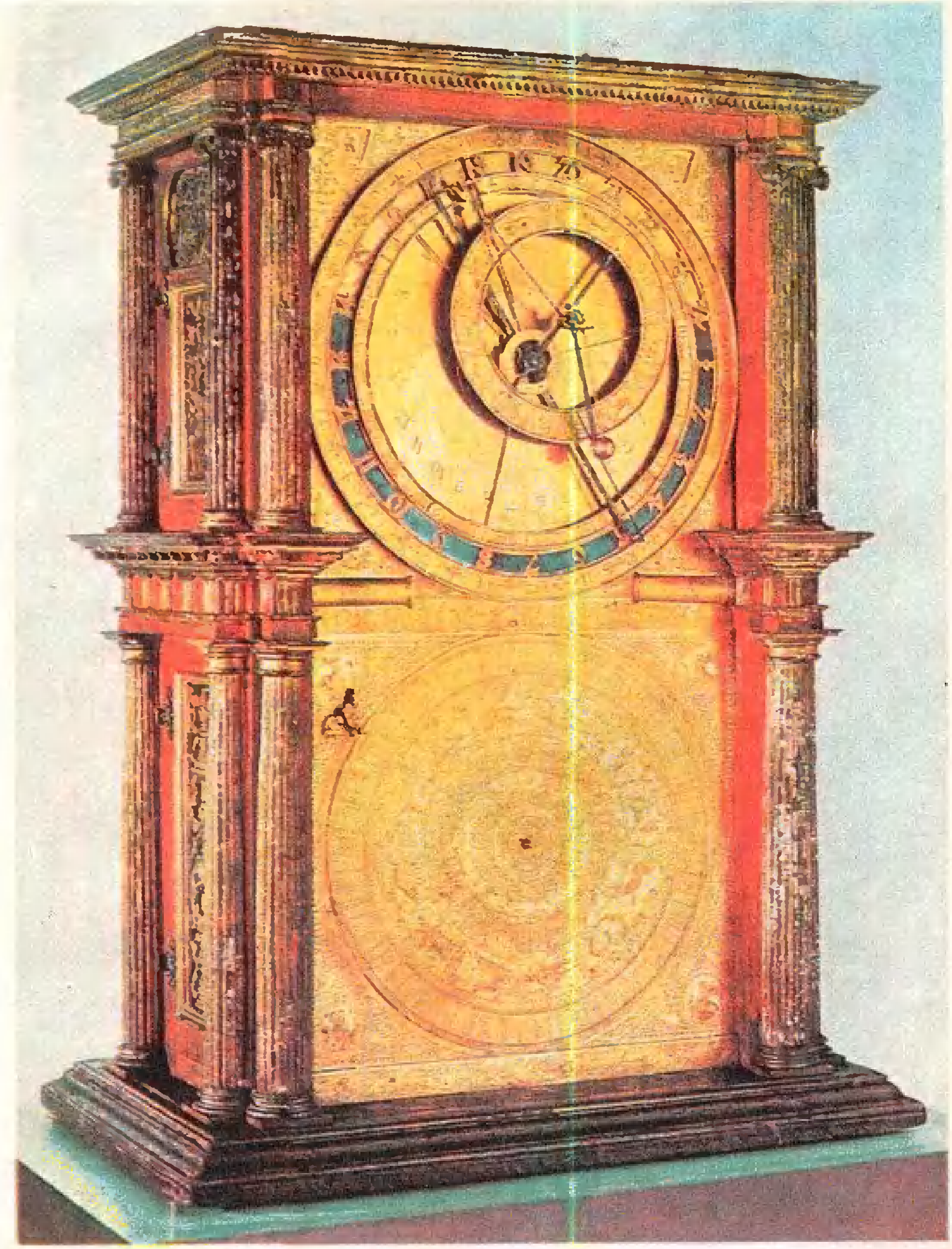
Квант

1975
8

Научно-популярный физико-математический журнал





Эти астрономические часы были сделаны в 1572 году. Внешняя шкала верхнего циферблата разделена на 24 часа — дважды по 12. По этой шкале три стрелки указывают солнечное, лунное и звездное время. По двум другим шкалам циферблата определяется время, отсчитываемое от восхода или от захода Солнца (эти шкалы тоже разделены на 24 деления). Астролябия, установленная в верхней части часов, показывает положение Солнца относительно созвездий Зодиака.

В настоящее время часы хранятся в музее истории искусств в Вене.

Основан в 1970 году.

Квант

1975
8

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Прибор, который вы видите на первой странице обложки, называется пинкомпас (pinn по английски означает стержень, штырек): этот прибор, которым пользовались мореплаватели еще в XVIII веке, хранится сейчас в Музее Альтоны в Гамбурге. Определять с его помощью координаты нельзя, но зато можно «записывать» курс корабля. На каждом румбе (1 румб=360°:32) розы ветров сделаны 8 отверстий. Все отверстия образуют в совокупности концентрические окружности. Так что «циферблат» пинкомпаса как бы покрыт координатной сетью. Каждые полчаса вахтенный вставляет штырь в отверстие, соответствующее определенному направлению. В этом направлении корабль будет держать курс в ближайшие полчаса. Но для того, чтобы определить нужное направление, необходимо знать координаты корабля в данный момент. О том, как определяют эти координаты, читайте в статье академика А. А. Михайлова (с. 11).

Н. Я. Виленкин

Анри Лебег

(к столетию со дня рождения)

Анри Лебег родился сто лет тому назад, 28 июня 1875 года, в маленьком французском городке Бовэ. После успешного окончания школы Лебег поступил в Парижскую Высшую Нормальную школу, где слушал лекции Ж. Таннери, К. Жордана и других выдающихся математиков. Окончив ее, он работал преподавателем математики лицея в Нанси, продолжая научную работу, начатую еще в Париже. Защитив в 1902 году докторскую диссертацию, Лебег перешел на кафедру математики провинциального университета в городе Ренне, откуда переехал в Пуатье, и лишь в 1910 году вернулся в Париж, где стал профессором Сорбонны, а с 1921 года — Коллеж де Франс.

За свои научные заслуги Лебег был избран в 1922 году членом Французской Академии наук, в 1924 году — почетным членом Лондонского математического общества, а в 1930 году — членом Королевского общества (Английской Академии наук). Четыре раза он получал академические премии, написал несколько книг и много научных работ. После тяжелой болезни Лебег скончался 26 июля 1941 года.

Тихая, неторопливая жизнь кабинетного ученого! Но насколько незатейливыми были внешние события жизни Лебега, настолько яркими и глубокими оказались его научные достижения. Если открыть наугад любую страницу какой-нибудь книги по теории функций действительного (или, как еще говорят, вещественного) переменного, по функциональному анализу или по теории вероятностей, почти наверняка там встретятся слова «мера Лебега», «точка Лебега», «интеграл Лебега», или введенные им понятия «суммируемая функция», «почти всюду», а иногда имя Лебега окажется зашифрованным символом L^p: ведь L — это первая буква его фамилии Lebesque, а L^p — пространство функций, p-я степень которых суммируема по Лебегу. Почти все понятия, относящиеся к современной теории меры и интеграла, восходят к работам Лебега, и введение этих понятий в каком-то смысле оказалось поворотным пунктом перехода от математики XIX века к науке XX века.

В развитии науки бывают длительные периоды, напоминающие спокойное течение большой реки. В эти периоды, исходя из уже готового запаса понятий и представлений, ученые получают новые научные результаты и расширяют область применимости уже известных методов. Но понемногу начинают накапливаться проблемы, решение которых в рамках существующих научных представлений невозможно. Тогда наступает пора революционных преобразований — подвергаются критике основные понятия, меняются взгляды на ценность различных научных результатов, на самые цели и задачи научного творчества в данной области науки. И только появление совершенно новых идей выводит науку из создавшегося тупика.

Таким переломным моментом в истории развития математики оказалась вторая половина XIX века. В течение почти двухсот лет математический анализ развивал идеи Ньютона и Лейбница, создавших исчисление бесконечно малых, математику переменных величин. Разумеется, вводились новые понятия, неизвестные основоположникам анализа, но эти понятия естественно вытекали из уже имевшихся идей. И если бы каким-то чудом Ньютону или Лейбницу попал в руки математический журнал середины XIX века, то они довольно быстро поняли бы постановки большинства задач и методы их решения. Даже обозначения не очень изменились за протекшие годы. А самое главное, неизменной оставалась основная установка: ценность научного результата зависит в первую очередь от того, насколько успешным оказывается новый метод в решении практических задач.

Но характерной чертой математики является то, что, наряду с созданием новых методов решения практических задач, она интересуется самим создаваемым ею инструментом, для каждого возникающего понятия ищет наиболее широкую и естественную область его применимости, для каждой доказанной теоремы — наиболее общие условия, при которых она справедлива. И это — не пустые занятия математических снобов, а необходимость. Только установив понятия и теоремы в наибольшей общности, освободив их от ненужных ограничений, связанных с той конкретной задачей, из которой они возникли, можно увидеть связи между далекими друг от друга областями науки, научиться применять созданные методы в ситуациях, на первый взгляд, не имеющих ничего общего с тем вопросом, где они возникли.

В течение двух столетий математики без особых размышлений пользовались понятиями числа, геометрической фигуры, функции, длины, площади, объема и т. п. Рассказывают, что когда один французский генерал принес в Академию наук свое «решение» проблемы квадратуры круга, его спросили, что именно он понимает под площадью круга. «Площади не определяют, их вычисляют!»,— воскликнул бравый генерал. И такая точка зрения была распространена среди большинства математиков. Они считали, что площадь — это свойство геометрической фигуры, выражаемое числом и обладающее очевидными свойствами (площадь целого равна сумме площадей частей, конгруэнтные фигуры имеют равные площади и т. д.). Ни на одну минуту не сомневались они в том, что любая плоская геометрическая фигура имеет площадь (быть может, равную нулю или бесконечности). Впрочем, и по другим вопросам взгляды математиков XVII—XVIII веков отличались такой же некритичностью — они были убеждены, что ко всем линиям в любой точке, за исключением, быть может, нескольких особых точек, можно провести касательную, что все поверхности гладки, а функцию они отождествляли с выражением, которым она задана. Но такая расплывчатость основных определений стала приводить к ошибочным результатам, и уже с начала XIX века начался процесс уточнения математических понятий, длившийся несколько десятилетий.

В ходе этого процесса были даны определения таким понятиям, как функция, предел, линия, длина линии, площадь области, интеграл и т. д. Но, как это часто бывает, после уточнения понятий оказалось, что они охватывают гораздо более широкий класс объектов, чем это казалось первоначально, что свойства уточненных

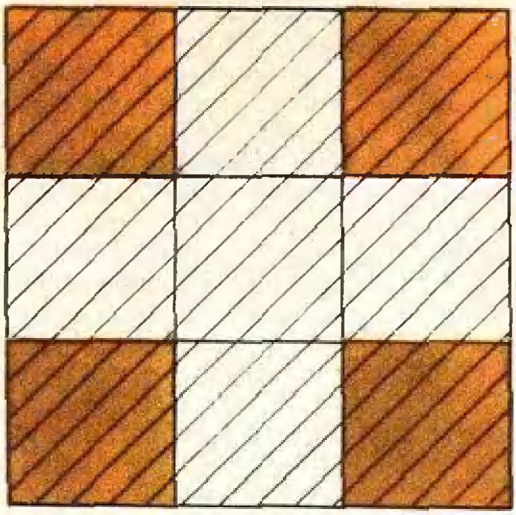


Рис. 1.

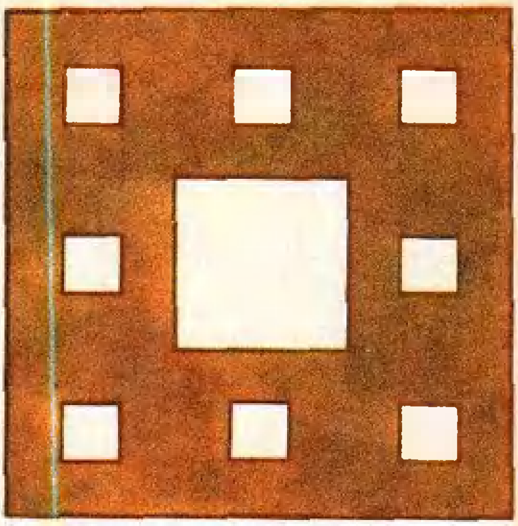


Рис. 2.

понятий не слишком похожи на привычные.

Оказалось, например, что существуют непрерывные линии, проходящие через любую точку квадрата, кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную, области, которым нельзя приписать никакого значения площади. Дело было в том, что понятие геометрической фигуры стало применяться в ином смысле, чем это делали математики предыдущих поколений. После того как Кантор создал теорию бесконечных множеств, математики стали считать фигурами любые точечные множества, в том числе определяемые с помощью бесконечных процессов. Вот несколько примеров таких фигур.

Возьмем квадрат со стороной 1 и разделим его на 9 квадратов. После этого выбросим «крест», образованный пятью квадратами, сохранив границы оставшихся квадратов. Получится фигура, состоящая из четырех квадратиков (рис. 1). С каждым из них проделаем ту же операцию и будем продолжать этот процесс до бесконечности. У нас будут получаться фигуры, состоящие из все большего и большего числа квадратиков, размеры которых все время уменьшаются. Фигуры, получаемые на каждом шагу этого процесса, обычны, но если взять пересечение всех получившихся фигур, то перед нами окажется весьма странное множество.

Другое множество получается, если выбрасывать не кресты, а лишь центральные квадраты, оставляя их границы (рис. 2).

Исследования таких множеств, а также функций, имеющих весьма странные свойства (например, всюду разрывных, или непрерывных во всех иррациональных точках и разрывных во всех рациональных точках, функций, графики которых не имеют ни в одной точке определенного направления), стали все чаще и чаще появляться во второй половине XIX века. Эти исследования приветствовались далеко не всеми учеными! Математики классического направления считали, что наука должна иметь дело лишь с объектами, непосредственно отражающими свойства реального мира. Их мнение о таких исследованиях ярко выразил один из крупнейших ученых того времени Анри Пуанкаре. Он сказал: «Раньше, когда изобретали новую функцию, то имели в виду какую-нибудь практическую цель; теперь их изобретают, не извлекая из них никакой пользы, а только для того, чтобы обнаружить недостатки в рассуждениях наших отцов». Еще резче выразился на эту тему руководитель французской математической школы Шарль Эрмит. В своем письме видному голландскому математику Т. Стилтьесу он писал: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной». Новую математику классики назвали «тератологией» (наукой об уродствах) функций.

Но молодежь тянулась к новым областям науки, не обращая внимания на ворчание математиков предшествующего поколения. Во Франции их вдохновляли лекции Жюля Таннери и Камилла Жордана, в которых курс математического анализа строился на твердой основе точных определений, безупречных доказательств, железной логики. Они усваивали на этих лекциях, что хотя разрывные функции и не встречались в существовавших тогда приложениях, их надо изучать наравне с непрерывными, так как этого требуют правильно понимаемые интересы математики; они узнавали, что определения длин, площадей и объемов, годные лишь для гладких линий и поверхностей, слишком узки, что надо искать более общие определения. Эти идеи накапливались, переходили в убеждения, становились стимулом к научной работе. В 1898 году молодой французский ученый Р. Бэр защитил диссертацию, в которой дал глубокую классификацию разрывных функций. В том же году появилась книга одного из самых ярких лидеров молодежи, двадцатисемилетнего математика Эмиля Бореля, посвященная новой теории функций. К этой научной школе и примкнул начинавший в ту пору свою научную деятельность Анри Лебег.

Одной из первых работ Лебега была заметка «О нелинейчатых развертывающихся поверхностях». Эта работа разгневала математиков классического направления. Особенно возмущался один из ведущих геометров того времени Гастон Дарбу. Само название работы казалось ему противоестественным. Дело в том, что *развертывающимися* называют поверхности, достаточно малые части которых можно получить, изгибая кусок плоскости. Но все известные к тому времени развертывающиеся поверхности — цилиндры, конусы и другие — состояли из прямолинейных образующих. Они были, как говорят, *линейчатыми*. Поэтому говорить о нелинейчатых развертывающихся поверхностях казалось полной нелепостью. Но все дело было в том, что молодой автор по-иному, чем геометры-классики, понимал развертывающиеся поверхности. Он считал такими не только поверхности, получаемые аккуратным изгибанием листа бумаги, но и поверхности, которые получатся, если этот лист скомкать (объясняя эту работу своим друзьям, он так и сказал: «Представьте себе скомканный носовой платок»). Оказалось, что можно так «скомкать» кусок плоскости, что после этого на нем не останется ни одного прямолинейного отрезка. Разумеется, получившаяся развертывающаяся поверхность нигде не имела касательной плоскости, она вся состояла из складок и изломов. И понятно, почему ее пропустили геометры, классифицируя развертывающиеся поверхности — они-то занимались лишь гладкими поверхностями.

Интерес Лебега к развертывающимся поверхностям не был случайным. Его интересовал общий вопрос, поставленный еще Камиллом Жорданом: как определить площадь поверхности, не предполагая ее гладкости. Найти площадь скомканной развертывающейся поверхности легко — достаточно развернуть ее на плоскость. Но сосчитать площадь такой поверхности по формулам, предлагаемым классической математикой, невозможно — в них входят производные, а они существуют лишь для гладких поверхностей.

Конечно, вместо касательных плоскостей можно было попробовать вы-

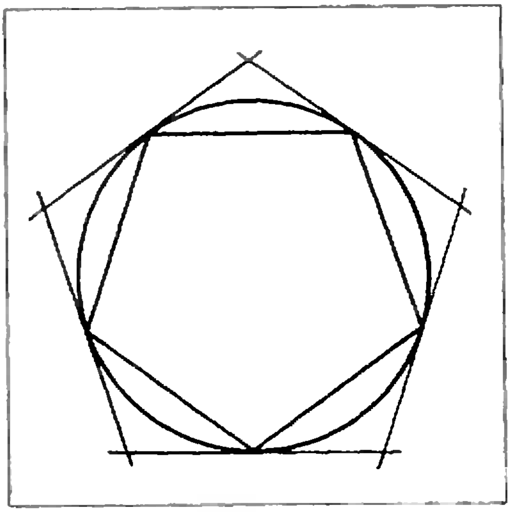


Рис 3

числить площадь поверхности по-другому, вписывая в нее многогранники и переходя к пределу при уменьшении всех размеров граней. Но немецкий математик Г. Шварц доказал, что таким путем невозможно найти площадь самого обыкновенного цилиндра — в него можно вписать многогранник со сколь угодно малыми гранями, имеющий сколь угодно большую площадь. Такой многогранник весь состоит из мелких складочек.

Лебегу удалось после длительных размышлений придумать определение площади поверхности, которое не требовало проведения касательных плоскостей, но в то же время обходило все трудности, связанные с примером Шварца. Решая эту частную задачу, Лебег пришел к общим идеям о том, что такое мера множества, как измерять длины, площади и объемы самых причудливых фигур. Этим вопросом интересовались до него многие математики. Наиболее удачным оказалось определение Жордана.

Основная идея Жордана заключалась в следующем. Существуют фигуры, заведомо имеющие площадь, например, многоугольники. Предположим теперь, что фигура Φ обладает следующим свойством: *какое бы малое положительное число* ε *мы ни взяли, найдутся две многоугольные области*)* Φ_ε *и* Φ_ε^*, *такие, что* Φ_ε *целиком содержится в фигуре* Φ, *а* Φ_ε^* *целиком ее содержит, причем разность площадей* Φ_ε^* *и* Φ_ε *меньше* ε. Тогда за площадь фигуры Φ надо принять число, которое заключено между площадями Φ_ε и Φ_ε^* для всех Φ_ε и Φ_ε^*. По другому это же определение можно сформулировать так: фигура Φ *измерима по Жордану*, если для любого $\varepsilon>0$ ее можно представить в виде объединения многоугольной области Φ_ε и остатка, который покрывается многоугольной областью, имеющей площадь меньшую, чем ε. Мера же $m(\Phi)$ такой фигуры заключена между числами вида $m(\Phi_\varepsilon)$ и числами вида $m(\Phi_\varepsilon)+\varepsilon$, где $m(\Phi_\varepsilon)$ — площадь Φ_ε.

Это определение соответствует обычному процессу измерения площадей фигур. К нему мы прибегаем в школе, измеряя площадь круга — в роли внутренних многоугольников выступают правильные вписанные многоугольники, а остаток состоит из сегментов круга, отрезанных сторонами этого многоугольника. Эти сегменты можно заключить в треугольники, образованные хордами и касательными (рис. 3) и показать, что при достаточно большом числе сторон многоугольника суммарная площадь этих треугольников сколь угодно мала.

Мера Жордана обладает многими хорошими свойствами, в частности, как тому и положено быть, объединение конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств измеримо, и его мера равняется сумме мер частей. С помощью этой меры удалось приписать площадь множествам, которые математики-классики не считали настоящими фигурами. Например, вспом-

*) Многоугольной называется область, которую можно разбить на несколько многоугольников, не имеющих общих внутренних точек.

ним фигуру, которую мы получали путем выбрасывания крестов из квадрата со стороной 1. После n выбрасываний остается 4^n квадратов, каждый из которых имеет площадь $1/9^n$. Поэтому все оставшееся множество можно покрыть квадратами с общей площадью $\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, а это значит, что при достаточно большом n общая площадь покрывающих квадратов сколь угодно мала, а потому мера всего оставшегося множества равна нулю.

То, что описанное выше множество имеет нулевую меру по Жордану, не удивительно, ведь оно насквозь продырявлено выбрасываемыми крестами и не имеет «живого места». Удивительно то, что другие столь же дырявые множества оказалось невозможно измерить по Жордану. Такое множество можно построить, более экономно выбрасывая кресты, а именно выбрав первый крест с площадью $^1/_4$, потом четыре креста общей площади $^1/_8$ и т. д. Остающиеся квадраты имеют последовательно общие площади в $^3/_4$, $^5/_8$, $^9/_{16}$ и т. д. Все эти числа больше, чем $^1/_2$, и потому любой многоугольник, содержащий остающееся после бесконечного числа выбрасываний множество, имеет площадь не меньшую, чем $^1/_2$. В то же время это множество не содержит ни одного целого квадрата, и потому его площадь не может быть больше нуля. Получившееся противоречие показывает, что это множество не имеет меры по Жордану. Таким образом, определение меры по Жордану не охватывает многие интересные фигуры.

Выход из создавшегося положения нашел Борель. Сложив площади всех выбрасываемых крестов, он получил бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots,$$

сумма которой равна $^1/_2$. Это число Борель принял за площадь выброшенной части, а за площадь остатка — разность $1-{}^1/_2={}^1/_2$. Конечно, такой ответ оказался весьма непривычным — в множестве не было ни одной целой части, а его площадь положительна. Но Борель пошел еще дальше, измеряя самые различные множества с помощью двух принципов:

а) Если множество Φ состоит из счетной *) совокупности измеримых подмножеств $\{\Phi_n\}$, никакие два из которых не имеют общей точки, то

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(\Phi_n).$$

б) Мера дополнения к измеримому множеству Φ получается вычитанием из меры целого U меры подмножества,

$$m(\Phi')=m(U)-m(\Phi).$$

Первый из этих принципов — далеко идущее обобщение древнего положения: мера целого равна сумме мер его частей; второй следует из того же положения. Пользуясь своими принципами, Борель нашел меры всех множеств, с которыми имели дело математики его времени. Например, из его принципов следовало, что любое счетное множество точек имеет нулевую меру: ведь каждая из точек имеет меру нуль, а тогда и объединение этих точек имеет нулевую меру.

Но в построениях Бореля был один недостаток — одно и то же плоское множество Φ можно сконструировать из многоугольников различными способами. И ниоткуда не следует, что при этом получится один и тот же результат для меры. Надо было дать определение меры, не зависящее от выбора того или иного способа построения множества.

Эту-то проблему и решил в своих работах Лебег. Взяв от Бореля идею суммирования рядов, он следующим образом видоизменил определение

*) Бесконечное множество называется счетным, если его элементы можно перенумеровать.

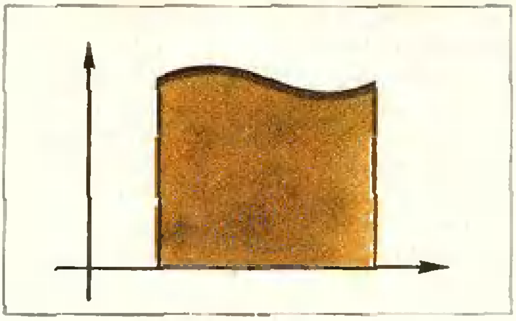


Рис. 4

Жордана. Во-первых, он разрешил покрывать остаток множества любой *счетной* системой многоугольников, лишь бы их суммарная площадь не превосходила ε. А во-вторых, он предложил не только добавлять к многоугольнику малые остатки, но и удалять из него малые множества.

В более строгом виде определение меры Лебега можно сформулировать следующим образом *). Назовем множество E ε-покрываемым по Лебегу, если его можно покрыть объединением счетной системы многоугольников, суммарная площадь которых меньше, чем ε. Множество Φ *измеримо по Лебегу*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно представить в виде многоугольной области Φ_ε, к которой присоединено ε-покрываемое множество D_ε, и из которой удалено ε-покрываемое множество E_ε. За меру Лебега множества Φ примем число $m(\Phi)$, которое больше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon)-\varepsilon$, но меньше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon)+\varepsilon$. Разумеется, определение Лебега после соответствующего видоизменения годилось для длин, объемов и т. д.

Идея Лебега оказалась очень удачной — все измеримые по Жордану множества оказались измеримы и по Лебегу, равно как и все множества, измеримые по Борелю. Лишь позднее удалось указать пример множества, не измеримого по Лебегу, однако, средства, которые для этого были использованы, признаются далеко не всеми математиками. Во всяком случае, никому не удалось дать эффективную конструкцию, приводящую к такому множеству. Мера Лебега удовлетворяла и принципу а) Бореля, она была, как говорят, *счетно-аддитивной*.

Однако своим основным достижением Лебег считал не создание нового понятия меры, а применение этого понятия для нового определения интеграла. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ не что иное, как площадь криволинейной трапеции (рис. 4). Поэтому, умея находить площадь этой трапеции, можно найти и значение интеграла. Но если функция имеет бесконечно много точек разрыва, например, разрывна в каждой точке, то соответствующая ей криволинейная трапеция не является фигурой в классическом смысле слова и может не иметь обычной площади. Вычисляя же эту площадь методом Лебега, получим значение интеграла от такой функции.

Определение интеграла как меры криволинейной трапеции, казалось не слишком убедительным самому Лебегу — еще со времен Коши, т. е. с начала XIX века, математики были приучены определять интеграл чисто аналитически, не прибегая к таким понятием, как площадь или объем. Лебег придумал аналитическое определение для своего интеграла. Объясняя это определение, он использовал однажды следующий образ: если имеется некоторая сумма денег, то неопытный человек будет ее пересчитывать подряд, беря друг за другом монеты и банковские билеты различного достоинства. Опытный же кассир разложит десятки к десяткам, пятерки к пятеркам, рубли к рублям и т. д., а потом умножит число десяток на 10, число пятерок на 5 и т. д. и сложит все получившиеся произведения.

*) Излагаемое здесь определение внешне отличается от того, которое в свое время предложил Лебег, но эквивалентно ему.

Точно так же, чтобы сосчитать значение интеграла от очень разрывной функции, Лебег предложил делить не область изменения аргумента, а область значений функции. Если заданы числа y_k и y_{k+1}, то через E_k обозначим совокупность тех значений x, для которых выполняется неравенство $y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}$. *Интегральной суммой Лебега* называют сумму $\sum\limits_k y_k m(E_k)$. Переходя к пределу при безграничном измельчении отрезков разбиения, получаем число, которое и равно интегралу Лебега $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Наглядно говоря, суть идеи Лебега состояла в том, что для разрывных функций «криволинейную трапецию» надо было резать не параллельно оси ординат, а параллельно оси абсцисс.

В настоящее время лебеговский процесс вычисления интеграла кажется математикам чем-то само собой разумеющимся. Но в начале века он казался потрясающим самые основы математики. И тогда Лебег придумал новое обоснование того, что его метод вычисления интегралов естествен. Возможно, на него оказал влияние пример Гильберта, давшего несколько ранее аксиоматику геометрии. Подобно этому Лебег сформулировал систему требований, которым должен удовлетворять интеграл, и доказал, что единственным определением интеграла, которое удовлетворяет всем этим требованиям, является предложенное им.

В 1902 году, благодаря поддержке К. Жордана и Э. Пикара, удалось преодолеть предубеждение противников новой математической школы, и Лебег успешно защитил докторскую диссертацию.

Создание меры и интеграла Лебега позволило преодолеть многие трудности, накопившиеся к тому времени в математическом анализе. Особенно полезной оказалась идея Лебега, что не надо требовать, чтобы какое-то свойство функции выполнялось для всех значений аргумента, а достаточно изучать свойства, выполняющиеся почти всюду, т. е. всюду, кроме множества точек нулевой меры. Оказалось, например, что если функция $y = f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ почти для всех значений x имеет производную, совпадающую с $f(x)$. Чрезвычайно полезен был интеграл Лебега в теории тригонометрических рядов, т. е. рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Сам Лебег много и с увлечением занимался этой теорией.

На первый взгляд казалось, что интеграл Лебега — слишком сложный и тонкий инструмент для того, чтобы им можно было пользоваться в приложениях; на практике такие «дикие» функции и множества не встречаются, и все практические проблемы обслуживаются обычными интегралами. Но в те годы стала развиваться теория бесконечномерных пространств, необходимая для изучения и решения интегральных уравнений (уравнений, содержащих искомую функцию под знаком интеграла). К таким уравнениям сводились многие задачи математической физики, и были придуманы способы их решения, основанные на построении последовательности функций, в известном смысле приближающейся к искомому решению. Доказать, оставаясь в рамках классической математики, что такая последовательность к чему-то приближается, не удавалось. Положение дел напоминало здесь попытку решить уравнение $x^2 = 2$, пользуясь лишь рациональными числами. Конечно, можно составить последовательность рациональных чисел, приближающуюся к искомому корню, но сам корень иррационален, и последовательность не имеет предела внутри множества рациональных чисел. Как известно, чтобы выйти из этого положения, надо пополнить множество рациональных чисел, присоединив к нему иррациональные числа.

Точно так же последовательность функций, получаемых при приближенном решении интегрального уравнения, не всегда сходится к какой-нибудь «хорошей» функции. Чтобы быть уверенным в существовании решения, надо пополнить множество функций, присоединив к нему разрывные функции. Но если присоединить к множеству непрерывных функций какие попало разрывные функции, то хорошей теории построить не удастся. Оказалось, что присоединять надо функции, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Тогда получается пространство, очень похожее по своим свойствам на наше евклидово пространство, только бесконечномерное. Это пространство называют гильбертовым.

Триумф идей Лебега, Бэра и Бореля привел к тому, что даже Дарбу изменил свое мнение о новой математике, и, выступая в 1908 году на Математическом конгрессе в Риме, говорил о пламенном и пытливом духе математики XX века, о науке, ведущей свои изыскания в абсолютно новой области с неизведанными перспективами. Он подчеркнул, что наука XX века не боится атаковать основы построений, которые столь долго казались непоколебимыми.

Позже идеи, приведшие к созданию меры и интеграла Лебега, позволили А. Н. Колмогорову построить аксиоматику теории вероятностей, Н. Винеру определить понятие меры для функциональных пространств. Всюду, куда проникали идеи меры, использовались конструкции и понятия, восходящие к Лебегу. Весьма полезны они оказались в статистической физике, дав возможность А. Я. Хинчину и Дж. фон Нейману обосновать некоторые идеи американского физика Гиббса.

Замечательные работы, лежавшие в области теории функций действительного переменного (так стали называть область математики, изучавшую общую теорию функций, меры и интеграла) сделали московские математики Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин, а также их многочисленные ученики.

Сам же Лебег в эти годы интересовался возникавшей тогда теоретико-множественной топологией, предвосхитив в одной из работ позднейшие исследования П. С. Урысона по теории размерности топологических пространств, теорией потенциала и другими вопросами математики. И хотя ничего равного достижениям своей математической молодости он уже не создал, их оказалось вполне достаточно, чтобы обессмертить его имя.

Последние двадцать лет жизни Лебег посвятил проблемам истории и преподавания математики. Естественно, что основное внимание он уделил теории измерения величин в средней школе. В серии статей, позднее собранных в книгу «Об измерении величин» (она переведена и на русский язык), он остроумно подверг критике распространенные заблуждения в преподавании этих вопросов. Он показал в своей книге несостоятельность распространенных определений длины, площади и объема, критиковал учебники за стремление к строгости в одних местах при грубых логических промахах в других.

Прошло 75 лет с тех пор, как Лебег создал свою теорию меры и интегрирования. Эти понятия навсегда вошли в математику — без них нельзя мыслить ни теорию вероятностей, ни функциональный анализ, ни статистическую физику, ни топологическую алгебру.

А. А. Михайлов

Что такое долгота и широта?

Положение точки на поверхности Земли определяется двумя координатами: географической широтой и географической долготой. Знаете ли вы, откуда произошли эти названия? Во втором веке н. э. греческий астроном и географ Клавдий Птолемей ввел понятия длины и ширины применительно к измерению стран, прилегающих к Средиземному морю, вытянутому с запада на восток. Результаты измерения вдоль моря он назвал длиной, а поперек — шириной. При переводе на русский язык вместо этих слов, которые можно относить к любым объектам, для характеристики положения тела на земной поверхности были введены специальные термины — долгота и широта. Хотя эти понятия, наглядно иллюстрируемые на глобусе, широко известны, далеко не все знают их точное определение.

Часто говорят, что широта φ есть угловое расстояние данного пункта от земного экватора, а долгота λ — это двугранный угол между плоскостью данного меридиана и плоскостью условно выбранного начального меридиана. Следовательно, нанесенная на глобус сеть параллелей и меридианов позволяет нам указать географические координаты любой точки земного шара. Естественно, что знание координат необходимо для ориентации. Но, находясь в какой-то точке на Земле, мы должны сами уметь определить свои географические координаты. Как известно, это делают с помощью астрономических наблюдений. Предположим, мы вычислили широту и долготу пункта, в котором мы находимся. Можем ли мы теперь, найдя на глобусе точку с такими координатами, быть уверенными, что мы находимся именно в этой точке Земли? Нет! Даже если точка на глобусе указана с предельной точностью.

Дело в том, что Земля не является шаром, и глобус — лишь упрощенная наглядная модель Земли. Именно неправильность (нешарообразность) формы Земли приводит к расхождению географических координат, полученных из астрономических наблюдений, и координат, определенных для данной точки по глобусу, по карте.

Если Землю считать шаром, то отвесная линия в любом месте на земной поверхности проходит через центр Земли, а меридианы и экватор — окружности, радиусы которых равны радиусу Земли. Тогда географическую широту можно измерять дугой меридиана от плоскости экватора до данной точки, а долготу — дугой экватора от условно выбранного начального меридиана до данного.

Истинная форма Земли, называемая геоидом, весьма сложна, хотя и близка к эллипсоиду вращения, сплюснутому в направлении полюсов. Сложность формы вызвана неравномерностью распределения массы внутри и на поверхности Земли, в частности, наличием материков с высокими горами и глубоких впадин в океанах.

Вследствие эллипсоидальности Земли отвесная линия не в любой точке проходит через центр Земли, а неправильности геоида приводят еще и к боковым отклонениям отвесной линии, так что она вообще может даже не пересечь земную ось. Отсюда возникают так называемые уклонения отвеса, выражающиеся в неправильных изменениях направлений отвеса при переходе от точки к точке. А поскольку при практическом нахождении широт и долгот одним из основных направлений, по которому ориентируются астрономические инструменты, является отвесная линия, расхождение между истинными географическими координатами точки Земли и ее координатами на глобусе становятся вполне понятными.

Сформулируем четкое определение широты и долготы. Широта есть угол между отвестной линией в данном месте и плоскостью экватора. Понятно, почему мы не сказали «плоскостью земного экватора». Из-за уклонений отвеса и земной экватор — линия, во всех точках которой географическая широта равна нулю,— отклоняется от плоского сечения Земли на величину уклонений отвеса, которые могут достигать и даже превосходить, особенно в гористых местностях, 10″, что в линейной мере соответствует примерно 300 *м*. Все сказанное о земном экваторе относится и к параллелям — линиям равной широты, которые по той же причине не являются плоскими кривыми.

Строгое определение географической долготы должно быть таким: долгота — это есть двугранный угол между двумя плоскостями, параллельными оси вращения Земли, одна из которых содержит отвесную линию в условно выбранной исходной точке, а другая — отвесную линию в определяемой точке. От градусной меры долготы можно перейти к временным координатам. Переход этот производится с помощью несложных расчетов: оборот Земли вокруг собственной оси на 360° соответствует 24 часам, следовательно, 1 час = 15°, 1 минута времени = 15′ дуги, 1 секунда времени = 15″ дуги. Очевидно, что в пунктах, которым соответствуют разные долготы, полдень (и соответственно полночь) наступает в разные моменты. Легко понять, что разность (по времени) между моментами полудня в данном месте и в пункте, долгота которого принята за нуль, и есть долгота данного места.

За исходный пункт в определении долгот в 1884 году по международному соглашению была принята Гринвичская обсерватория, основанная в 1675 году в предместье Лондона. До этого в разных странах за исходные пункты принимались различные главнейшие обсерватории: в России — Пулковская близ Петербурга, во Франции — Парижская обсерватория и т. д. В старину долготы отсчитывались от одного из Канарских островов — Ферро, который был наиболее западной точкой Старого света, т. е. материков Европы с Азией и Африки. Поэтому все долготы считались в одном направлении и одного знака — к востоку от Ферро.

Вследствие уклонений отвеса и все меридианы — линии, все точки которых имеют одинаковую долготу,— тоже не плоские кривые, получаемые в сечении Земли плоскостями, содержащими земную ось, а слегка извилистые линии, уклоняющиеся в обе стороны от плоских сечений на расстояния до нескольких сотен метров.

С какой точностью находятся географические координаты из астрономических наблюдений? Это зависит прежде всего от назначения таких определений. Наиболее точно определены координаты астрономических обсерваторий, широта которых известна с точностью до 0″,1, а долгота — до 0,01 секунды времени. Для оценки этих величин заметим, что 1″ дуги меридиана соответствует 31 *м* на земной поверхности, 0″,1 секунды времени на экваторе равна 46 *м*, а в средних широтах — почти в два раза меньше. Таким образом, указанная точность соответствует примерно 3 *м* на Земле. Поэтому, например, недостаточно сказать, что широта Парижской обсерватории равна 48°50′11″,2 и восточная долгота — 0ч9м20с,93. Нужно указать, к какому месту обсерватории это относится — в данном случае к большому меридианному кругу (это один из приборов для измерения координат светил).

Расскажем теперь, как же находятся широта и долгота из астрономических наблюдений. Определение широты сравнительно просто и сводится к измерению угловой высоты полюса мира*) над горизонтом (рис. 1). Так как полюс мира на небе ничем не отмечен, то наблюдают какую-нибудь звезду, угловое расстояние которой от полюса известно, или Солнце, для которого это расстояние дается в эфемеридах**) на каждый день

*) См. «Комментарий» в конце статьи.

**) Эфемериды — это таблицы, в которых положения светил даются на любые избранные моменты времени (иногда на много лет вперед).

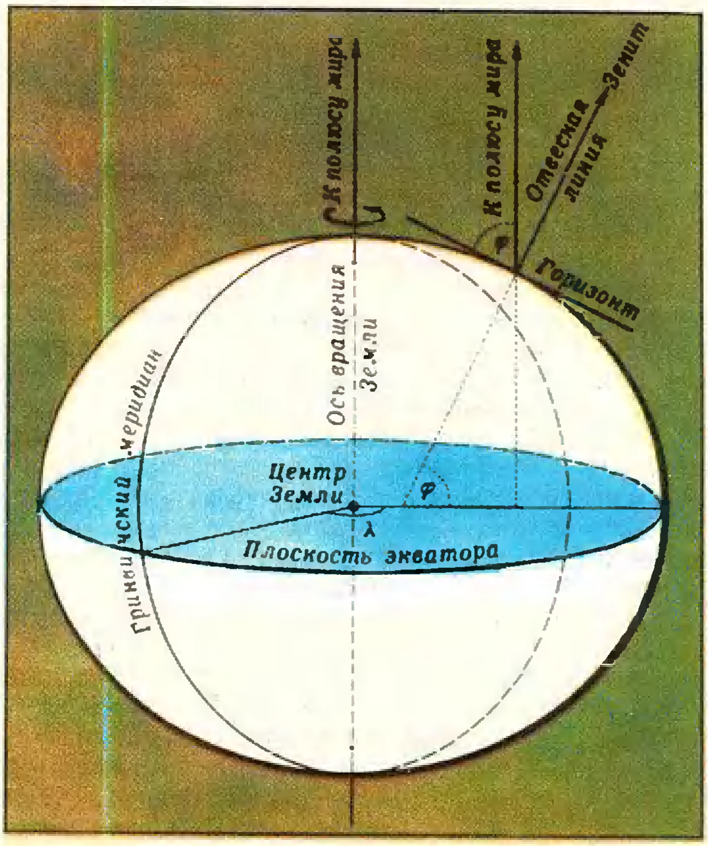
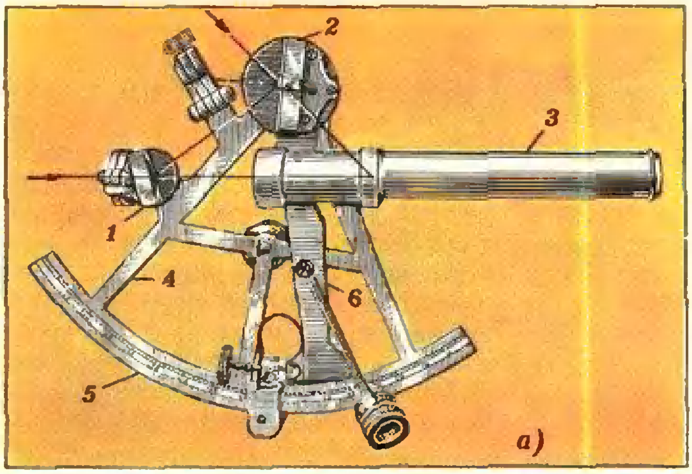


Рис. 1. Географическая широта данной точки — угол между отвесной линией в точке и плоскостью экватора — равна угловой высоте полюса мира над плоскостью местного горизонта.

Плоскость горизонта практически определяется свободной поверхностью жидкости в сосуде, пузырьком в трубке спиртового уровня или направлением, перпендикулярным к отвесной линии в данном месте. Другое направление — к полюсу мира — находится из астрономических наблюдений. Полюс мира лежит посередине между точками верхней и нижней кульминаций какой-нибудь близполюсной звезды.

Точное определение долготы в данном месте Земли сводится к определению местного времени. Выбрав условно за начало отсчета долгот некоторое место, в котором по наблюдениям Солнца или звезд определено местное время, и сравнивая результаты определения времени в каком-то месте Земли с этим исходным временем, находят долготу этого места.



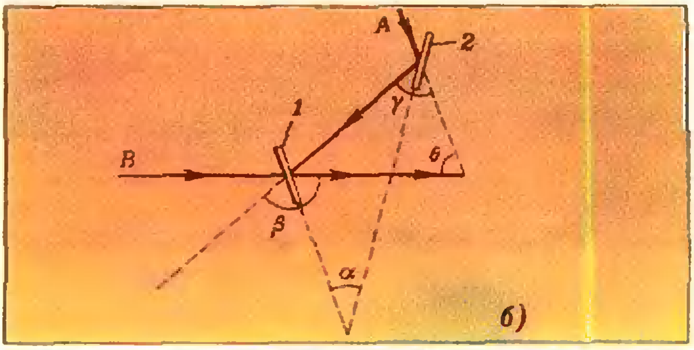


Рис. 2. С помощью двух зеркал *1* и *2* (см. рис. 2, *а*) в зрительной трубе *3* совмещаются изображения двух предметов, угловое расстояние между которыми хотят измерить. Зеркало *1*, укрепленное неподвижно на металлической раме *4*, посеребрено только до половины его высоты, верхняя его часть прозрачна. Рама заканчивается лимбом *5*, представляющим собой дугу окружности с углом 60° (отсюда и произошло название прибора). Зеркало *2* скреплено с подвижной частью рамы — так называемой алидадой *6*, которая вращается вокруг оси, проходящей через центр лимба и перпендикулярной к нему. Таким образом по лимбу можно определить угол α между зеркалами, а он в свою очередь связан с угловым расстоянием θ между наблюдаемыми предметами (см. рис. 2, *б*):

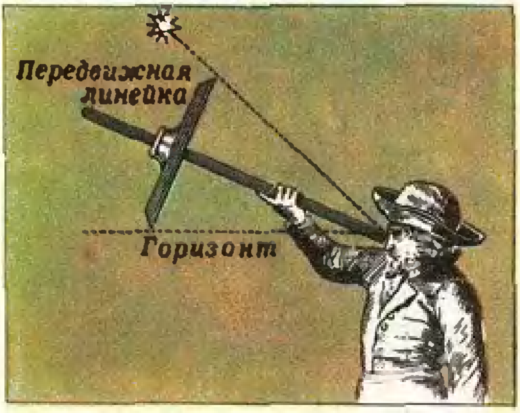
$$\theta = \beta - \gamma = 2\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = 2\alpha.$$

данного года. Измерение высоты производится во время прохождения светила через небесный меридиан, когда эта высота максимальна. Для этого пользуются специальными угломерными приборами. Еще в средние века появился первый простейший угломерный прибор, называвшийся якобштабом, а в 30-х годах XVIII столетия в Англии был изобретен секстант (рис. 2) — угломерный инструмент, которым пользуются по сей день для ориентации в открытом море и в воздухе. Во время наблюдений секстант держится в руке, что позволяет компенсировать корабельную качку. Обычно совмещают изображение Солнца (или в сумерки звезды) с линией морского горизонта. При некотором навыке удается измерять таким образом высоты над горизонтом с точностью до минуты дуги или даже несколько точнее. На суше, где инструменту можно дать прочную установку, используют более точные инструменты, например, универсальный инструмент. С его помощью угловые расстояния измеряют с точностью до 1″ и даже еще точнее.

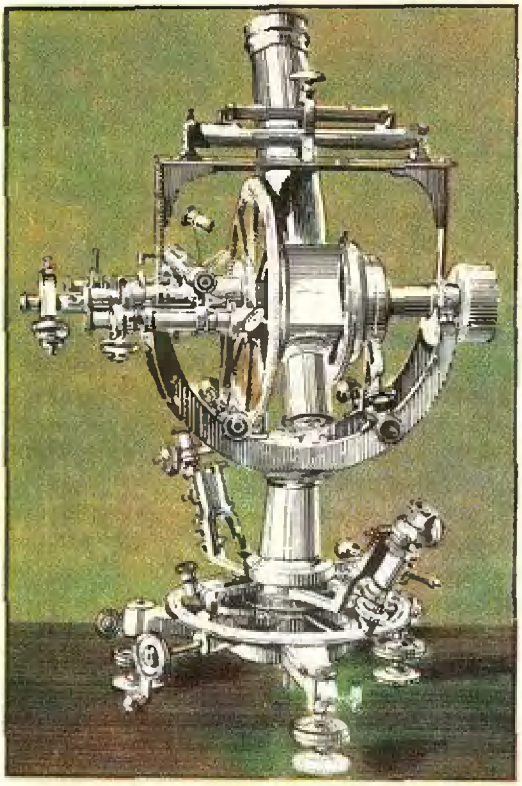
Определение долготы по идее очень просто: разность долгот двух пунктов равна разности их местных времен в один и тот же физический момент. Однако до изобретения радио на практике измерение долготы было очень трудной задачей. Действительно, как при отсутствии прямой связи узнать, сколько часов, минут и секунд местного времени в данный момент в Гринвиче (т. е. в исходном пункте для определения долготы), если вы находитесь за сотни или тысячи километров от него? В старину для этой цели наблюдали какое-нибудь астрономическое явление, видимое одновременно из этих пунктов и о котором было заведомо известно, в какой момент гринвичского времени оно происходит. Это были, например, лунные затмения и затмения спутников Юпитера (на использование последних для определения долготы указал еще Галилей, открывший спутники Юпитера в 1610 году). К сожалению, эти явления происходят не мгновенно, а длятся в течение нескольких минут, так что зафиксировать их можно лишь с соответствующей ошибкой. Между тем, одна минута времени соответствует 28 *км* под экватором, так что определение долготы таким способом было сопряжено с возможной ошибкой в сотни километров. Кроме того, была еще та трудность, что затмения спутников Юпитера почти невозможно наблюдать с палубы качающегося корабля и явления эти происходят далеко не ежедневно, а в течение нескольких месяцев в году Юпитер вообще не виден. Затмения Луны и вовсе редкие явления и происходят не чаще, чем два раза в год. Поэтому при путешествиях приходилось по нескольку дней или даже недель дожидаться, пока не удастся сделать несколько (для контроля и повышения точности) таких наблюдений, а в море для целей навигации такой способ определения долготы был совсем не пригодным.

В XVI веке был найден другой способ определения местного времени начального меридиана — по так называемым лунным расстояниям, правда, практическое применение его стало возможным лишь после изобретения секстанта. Луна ежемесячно обходит вокруг Земли, уподобляясь как бы стрелке часов, движущейся по «циферблату» — звездному небу. Но эта стрелка движется чрезвычайно медленно, в 55 раз медленнее часовой стрелки обыкновенных часов. Понятно, что по движению часовой стрелки действительно можно определить время, но очень неточно из-за медленности ее движения. Очевидно, что определять время по движению Луны еще менее надежно, но здесь помогает точность и тонкость делений «циферблата» — точно известные положения звезд. Правда, и положения Луны относительно этих звезд нужно измерять с очень большой точностью, хорошим угломерным инструментом. В течение часа Луна перемещается по небу относительно звезд примерно на величину своего диаметра, видимого с Земли под углом около 30′, поэтому измерение лунного расстояния от звезды с точностью до 1′ позволяет определить время с точностью до двух минут. Для того чтобы воспользоваться этим методом, нужно очень хорошо знать все особенности движения Луны, так чтобы по наблюденному положению Луны можно было получить время начального меридиана, разность которого с местным временем этого пункта даст долготу последнего. Очевидно, что этот способ предъявляет очень высокие требования к небесной механике, которая разрабатывает теорию движения Луны, отличающуюся большой сложностью. Способ лунных расстояний по точности мало превосходил предыдущий, но он мог применяться в любое время, когда видна Луна и звезды, почему и получил большое распространение при путешествиях, особенно морских.

Однако и метод лунных расстояний не вполне удовлетворял моряков (в основном из-за сложности вычислений и малой точности). Плавание на парусных судах, зависящее от силы и направления ветра, часто длилось месяцами вне видимости берегов, поэтому было очень важно уметь определять положение корабля (его широту и долготу). В 1713 году английское правительство, будучи особенно заинтересованным в безопасности навигации (в то время Англия была страной с наиболее развитым морским флотом), назначило огромную премию в 20 000 фунтов стерлингов за разработку уверенного способа определения долготы с точностью до $^1/_2$ градуса. Часть этой премии была присуждена (уже посмертно) немецкому астроному Тобиасу Майеру за составление таблиц движения Луны, которые позволили уточнить определение долготы по лунным расстояниям. Половину премии получил английский изобретатель и часовщик Харрисон, который построил в 1735 году морской хронометр. Это — пружинные часы, устройство которых аналогично устройству карманных и наручных часов. На хронометре имеются три стрелки — часовая, минутная и секундная, причем секундная резко перескакивает каждую полусекунду с четким ударом, слышимым на расстоянии нескольких метров. Хронометры очень удобны тем, что их можно переносить, не нарушая их хода. Для этого их помещают в ящике на карданном подвесе (подвес с двумя взаимно перпендикулярными осями), что позволяет им все время сохранять горизонтальное положение. Вскоре способ перевозки хронометров получил широкое применение и на суше — при путешествиях, для определения долгот населенных пунктов при составлении географических карт и для определения долгот основных обсерваторий разных стран. Так, например, после основания в 1839 году Пулковской обсерватории ее первый директор В. Я. Струве организовал в 1843 году специальную экспедицию, оснащенную 60-ю хронометрами для определения разности долгот между Пулковом и Гринвичем.

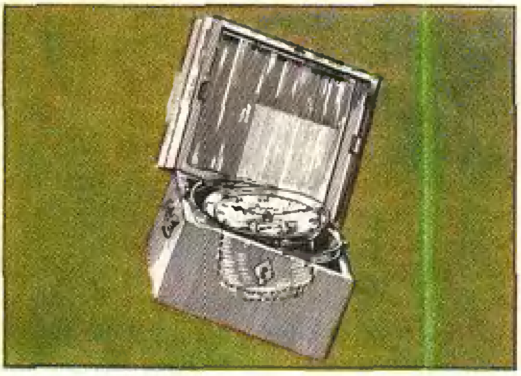


Якобштаб.



Универсальный инструмент

Задача определения долготы получила совсем новое решение с изобретением в середине прошлого столетия телеграфа, что дало возможность передавать сигналы времени начального меридиана и определять разность местных времен двух пунктов с недосягаемой ранее точностью — до долей секунды. Правда, для этого между пунктами должна быть телеграфная связь, что, очевидно, исключало применение такого способа для кораблей в открытом море. Тем не менее прокладка подводных кабелей позволила связать между собой разные континенты. Таким образом, например, была определена очень точно долгота обсерватории в Вашингтоне. В России основное время (по которому, к примеру, составлялось расписание поездов) было Петербургское, вернее, время Пулковского меридиана. Оно передавалось по проводу из Пулковской обсерватории на



Хронометр.

центральный телеграф в Петербурге, а оттуда — телеграфным и железнодорожным станциям по всей стране. По этому же времени стреляла в полдень пушка в Петропавловской крепости.

Наконец, самое универсальное решение принесло изобретение беспроволочного телеграфа. Уже в 1921 году радиостанция Новая Голландия в Петрограде стала передавать несколько раз в сутки так называемые ритмические сигналы времени, состоящие из 61 точки в минуту, поэтому промежутки между точками были меньше секунды на $^1/_{60}$ секунды. Замечая на слух совпадения секундных ударов хронометра с точками радиосигналов, можно было сверить свой хронометр со всемирным, т. е. Гринвичским, временем с точностью до сотых долей секунды. Правда, вследствие ошибок хода часов обсерватории и разных технических помех эти сигналы бывали на доли секунды ошибочными, но это можно было учесть позже, после приема их на обсерватории и последующих астрономических наблюдений. Для этого ежемесячно публиковались специальные бюллетени, указывавшие точный момент выхода в эфир прошлых сигналов, что позволяло задним числом исправлять показания хронометра. Это нужно было, конечно, лишь при определении долготы с предельной точностью; в навигации же, где точность до 1 секунды более чем достаточна, публикуемые поправки переданных сигналов времени никакого значения не имели. Ныне, благодаря изобретению кварцевых, а затем и молекулярных часов *), хранящих время до тысячных долей секунды в течение многих месяцев, поправки передаваемых радиосигналов практически сведены к нулю. Старая задача определения географической долготы получила наиболее точное решение.

Закончим нашу статью таким примером. Представьте себе человека, знакомого с астрономическими методами определения его местоположения. Пусть его завезут в любое место — на необитаемый остров, в пустыню, в горы, куда угодно, и пусть он совершенно не знает, где находится, в какой стране, даже в каком полушарии. Пусть он потерял счет времени и не знает ни месяца, ни числа. Но дайте ему астрономический ежегодник с таблицами логарифмов, универсальный инструмент, хронометр, показывающий произвольное время, и радиоприемник для сигналов времени (без права приема других передач). Разрешите ему в одну ясную ночь пронаблюдать звезды, а на следующее утро — Солнце. Обработав свои наблюдения, он скажет месяц и число, широту и долготу своего места, а по географической карте укажет, где он находится и в каком направлении нужно идти, чтобы попасть в ближайший или заданный город. Словом, такому человеку невозможно заблудиться на земном шаре.

*) В кварцевых часах роль маятника выполняет пластинка из кварца, вырезанная определенным образом. В кварце возбуждаются электромагнитные колебания, частота которых долгое время сохраняется неизменной.

Действие молекулярных часов связано с собственными колебаниями молекул некоторых веществ.

Комментарий

Если в течение нескольких часов наблюдать за звездным небом, то можно заметить, что положения созвездий изменяются относительно сторон горизонта. Например, в восточной части неба звезды поднимаются выше над горизонтом и перемещаются вправо. В северной стороне неба большинство звезд в течение суток описывают концентрические окружности. Можно сказать, что весь небесный свод (небесная сфера) вращается вокруг некоторой оси, называемой осью мира. Точки пересечения оси мира с небесной сферой называют полюсами мира — северным и южным. Северный полюс — тот, со стороны которого вращение небесной сферы происходит по часовой стрелке (если смотреть извне). Это вращение в действительности кажущееся, так как на самом деле вращается Земля вокруг своей оси (в противоположном направлении). Очевидно, что ось мира параллельна оси вращения Земли.

Кроме оси мира и полюсов мира, есть еще несколько характерных линий и точек на небесной сфере (рис. 1). Плоскость $SWNE$ — плоскость горизонта, плоскость, касательная к поверхности Земли в точке C, где находится наблюдатель. Линия NS — полуденная линия (по этой линии в полдень падает тень от вертикальных предметов). Отвесная линия, проведенная в точке C, пересекает небесную сферу в точке зенита Z. Плоскость, проходящая через точки S, Z, P (северный полюс мира), N — плоскость небесного меридиана. Небесный экватор — это линия пересечения плоскости, перпендикулярной к оси мира и проходящей через наблюдателя (точка C), с небесной сферой.

Каждое светило за сутки два раза пересекает небесный меридиан; явления прохождения светила через небесный меридиан называются кульминациями. В верхней кульминации светило находится выше всего над горизонтом, в нижней кульминации — ниже всего (рис. 2).

У светил, находящихся вблизи полюса мира, можно наблюдать обе кульминации (и верхнюю, и нижнюю); у восходящих и заходящих светил наблюдают только верхнюю кульминацию (нижняя кульминация происходит под горизонтом).

Момент верхней кульминации Солнца называют истинным полднем, а момент нижней кульминации Солнца — истинной полночью.

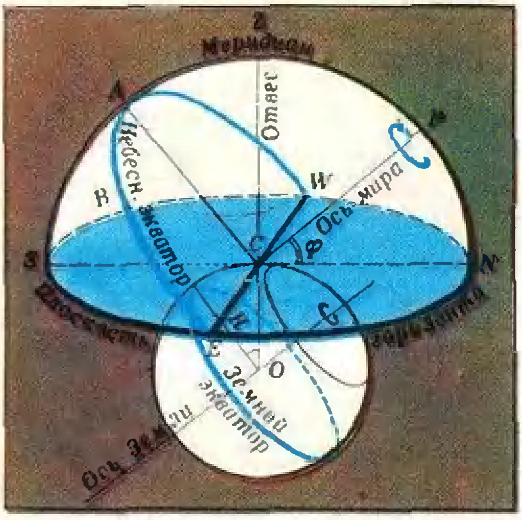


Рис. 1.

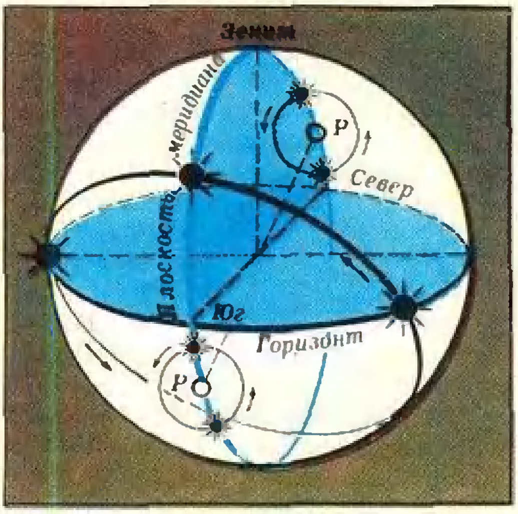
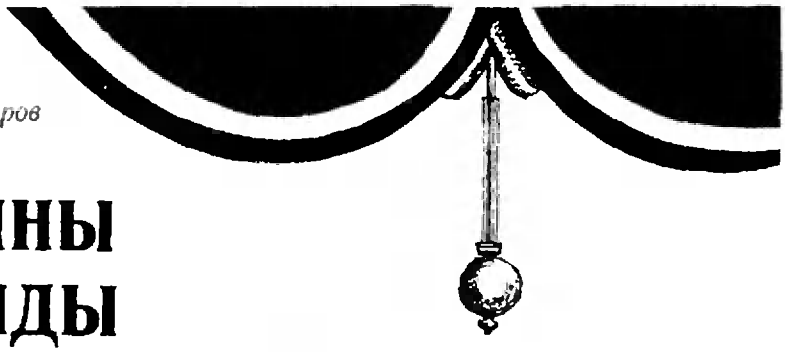


Рис. 2.



С. Г. Веров

Тайны циклоиды

> *«Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние ..., ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота».*
>
> Паскаль

Кривую, «так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого», первыми заметили Галилей (в Италии) и Мерсенн (во Франции). В Италии ее назвали *циклоидой*, во Франции — *рулеттой*. Привилось первое название, а рулеттами теперь называют кривые более широкого класса (см. статью «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5, с. 22; в дальнейшем, ссылаясь на эту статью, мы будем писать КР). Математики XVII века, создававшие общие методы исследования кривых, были очень заинтересованы в новых «подопытных» кривых. Среди этих кривых циклоида заняла особое место. Она оказалась одной из первых *трансцендентных* кривых (кривых н е а л г е б р а и ч е с к о г о происхождения), для которых удалось найти красивый явный ответ в задачах о построении касательных и вычислении площади. Но больше всего поражало, что циклоида вновь и вновь появлялась при решении самых разных задач, в первоначальной постановке которых она не участвовала. Все это сделало циклоиду самой популярной кривой XVII века: в 1673 году Гюйгенс констатировал, что «циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых».

1. От кинематического определения к аналитическому

Кинематическое определение циклоиды содержится в эпиграфе к этой статье. Попробуем его расшифровать.

Выберем на плоскости систему координат так, чтобы прямая, по которой катится круг (*направляющая* прямая), совпала с осью Ox, и пусть круг (его называют *производящим* кругом) катится в положительном направлении оси Ox. Предположим, что в начальный момент времени наблюдаемая точка границы круга занимает положение $A_0=O=(0,0)$ (рис. 1). Если r — радиус производящего круга, то центр его будет двигаться по прямой $y=r$. Чтобы полностью охарактеризовать качение круга, достаточно описать движение его центра, если только добавить, что *круг катится без скольжения*! *). Нам удобно, зафиксировав единицу времени, предположить, что центр круга движется равномерно со скоростью r. В момент времени t

*) Вероятно, именно это и имел в виду Паскаль, когда писал, что колесо «катится своим движением».

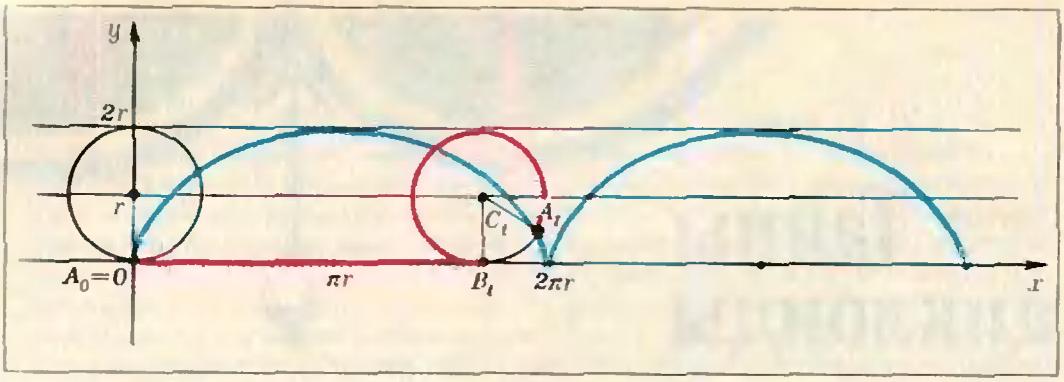


Рис. 1.

центр круга окажется в точке $C_t = (tr, r)$, и производящий круг будет касаться направляющей прямой в точке $B_t=(tr, 0)$.

Найдем теперь положение A_t наблюдаемой точки в момент времени t (в силу определения A_t будет точкой циклоиды). Чтобы это сделать, нужно четко сформулировать *условие*, что качение круга происходит без скольжения: оно состоит в том, что длина отрезка между точками касания производящего круга с направляющей прямой в моменты времени 0 и t (отрезка OB_t; см. рис. 1) равна длине дуги B_tA_t, «прокатившейся» по этому отрезку (при этом дуга может превышать полную окружность). Поэтому в момент времени t угол $B_tC_tA_t$ равен t (в радианной мере), так как длина дуги B_tA_t равна tr. Обозначив через D_t проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр круга C_t параллельно оси Ox, а через E_t — проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр C_t параллельно оси Oy (рис. 2), получим (с учетом направлений координатных осей)

$$C_tD_t=-r\sin t,\ C_tE_t=-r\cos t$$

(посмотрите, что будет в случаях $t>\frac{\pi}{2}$, $t>\pi$). Следовательно, координаты точки A_t циклоиды равны соответственно

$$x=rt-r\sin t,\qquad y=r-r\cos t.$$

Заметим, что при $t=2\pi$ длина отрезка OB_t оказывается равной длине окружности, наблюдаемая точка вновь попадает на ось Ox ($A_{2\pi}=(2\pi r, 0)$) и картина начнет повторяться. Таким образом, период циклоиды равен $2\pi r$.

Итак, циклоиду можно определить как множество точек с координатами $(rt-r\sin t,\ r-r\cos t)$ и при желании про исходное кинематическое определение забыть. Мы получили так называемое *параметрическое* задание циклоиды: обе координаты x и y точки A_t циклоиды являются функциями от некоторой вспомогательной переменной t.

Назовем точки циклоиды, лежащие на оси Ox, *остриями* циклоиды, точки, лежащие на прямой $y=2r$ — *вершинами*, а дуги между соседними остриями — *арками* циклоиды. В выбранной системе координат циклоида характеризуется одним параметром r (радиусом производящего круга). Все циклоиды, у которых точка $(0, 0)$ — острие, получаются друг из друга гомотетией. По каждой точке (x, y), $x\neq 0$ можно единственным образом выбрать r так, что эта точка будет лежать на первой арке, выходящей из $(0, 0)$, соответствующей циклоиды (докажите).

В статье КР доказано, что касательная к циклоиде в точке A_t (рис. 3) проходит через верхнюю точку производящего круга — точку F на ри-

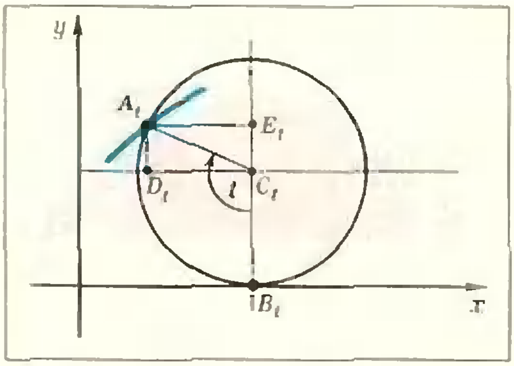


Рис. 2.

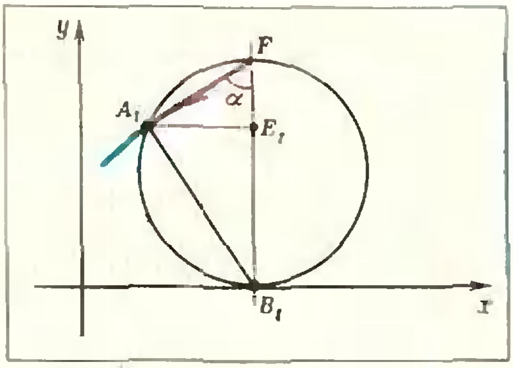


Рис. 3.

сунке 3. Пусть B_t — нижняя точка круга, α — угол между касательной и вертикалью FB_t. Тогда A_tB_t — *нормаль* к циклоиде (перпендикуляр к касательной), и для ординаты y точки A_t имеем: $y=E_tB_t=2r\sin^2\alpha$. Отсюда

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{y}{2r}}. \qquad (1)$$

Это соотношение будет играть важную роль в дальнейшем. Можно показать, что циклоида с параметром r является единственной кривой, проходящей через точку (0, 0), удовлетворяющей соотношению (1).

2. О площадях криволинейных фигур

Площади некоторых криволинейных фигур умели вычислять еще в Древней Греции. Вначале интересовались лишь *квадратурой фигур*, т. е. построением для данной фигуры циркулем и линейкой отрезка, длина которого равна ее площади. Как выяснилось позднее, это можно сделать для тех фигур, площадь которых вычисляется при помощи арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. Постепенно стали интересоваться фигурами, площади которых вычисляются с помощью произвольных алгебраических операций (*алгебраическая квадратура*), а затем даже и такими фигурами, в выражениях для площадей которых фигурировало число π. Основной метод вычисления площадей состоял в приближении данной фигуры многоугольниками и переходе к пределу; но должно было очень повезти, чтобы эти вычисления удалось довести до явного ответа.

Иногда вычисление площади фигуры можно упростить, воспользовавшись какими-нибудь общими свойствами площадей. Вот несколько таких свойств.

1. *При гомотетии фигуры с коэффициентом k площадь ее умножается на k^2, а при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом k площадь ее умножается на k.*

2. *Равносоставленные фигуры (т. е. фигуры, которые можно разрезать на попарно конгруэнтные части) равновелики (имеют равные площади).*

3. *Две фигуры, при пересечении которых любой прямой, параллельной некоторой фиксированной прямой l, получаются конгруэнтные отрезки, равновелики* (этот принцип сформулировал в 1635 году Кавальери (1598—1647)).

Представим себе, что контур фигуры — гибкая лента, а сама фигура составлена из очень тонких жестких слоев, параллельных прямой l («неделимых», по терминологии Кавальери). Рассмотрим преобразования, сохраняющие эти слои, но сдвигающие их друг относительно друга. Все получающиеся при таких преобразованиях фигуры в силу принципа Кавальери будут равновелики.

Перечисленные свойства площадей нуждаются в доказательствах (основная трудность этих доказательств состоит в том, чтобы дать строгое определение площади), но в них легко поверить. Сейчас мы расскажем о том, как изящно применяются эти свойства при вычислении площади фигуры, лежащей под аркой циклоиды.

3. Спутница циклоиды, лепестки Роберваля и площадь под циклоидой

Поскольку все циклоиды подобны, мы ограничимся случаем $r=1$. Вслед за Робервалем (1602—1675) свяжем с каждой точкой циклоиды A_t (см. рис. 3) ее проекцию E_t на вертикальный диаметр производящего круга. Точка E_t имеет координаты

$$x=t,\ y=1-\cos t=1+\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Кривую, составленную из точек E_t при всевозможных t, Роберваль назвал *«спутницей циклоиды»*. Ясно, что «спутница циклоиды» — это сдвинутая синусоида (на 1 вверх и на $\frac{\pi}{2}$ вправо).

С этим обстоятельством связан исторический курьез. Математики с незапамятных времен занимались тригонометрическими функциями, но синусоида впервые появилась лишь в XVII веке, причем не как график синуса, а как ... «спутница циклоиды» (отчасти это можно объяснить тем, что долго не рассматривали функций не алгебраического происхождения).

«Спутница циклоиды» разбивает ее на три части (рис. 4): фигуру под синусоидой и две симметричные фигуры, названные *«лепестками Роберваля»*. В силу свойства 2 площадь фигуры под синусоидой равна 2π: эта фигура равносоставлена с прямоугольником такой площади (рис. 5). Рассмотрим один «лепесток». Горизонталь на высоте $y=1-\cos t$ пересекает его по отрезку A_tE_t длины $|\sin t|$ (см. рис. 2). Переместив эти горизонтальные отрезки (при всевозможных t) вдоль своих горизонталей так, чтобы их левые концы попали на одну вертикаль, мы получим полукруг единичного круга (рис. 6). В силу принципа Кавальери площадь «лепестка» равна площади этого полукруга, т. е. $\frac{\pi}{2}$. Значит, площадь фигуры под аркой циклоиды с $r=1$ равна $2\pi+2\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$ (и следовательно, $3\pi r^2$ при $r\neq1$).

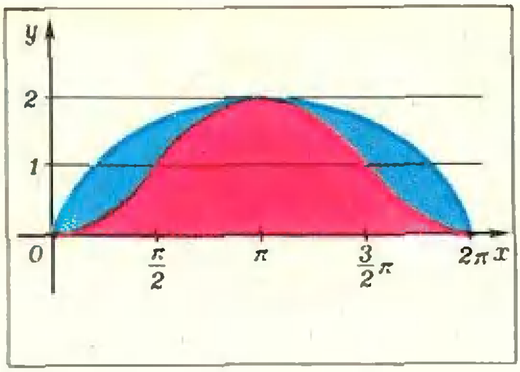


Рис. 4.

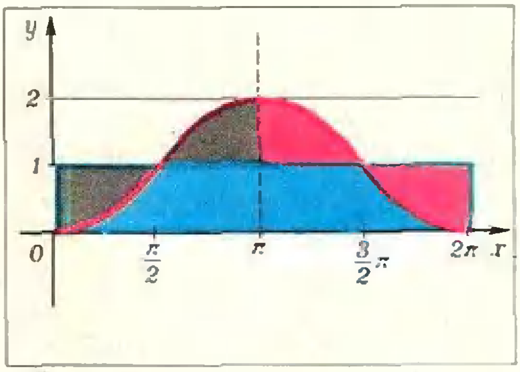


Рис. 5.

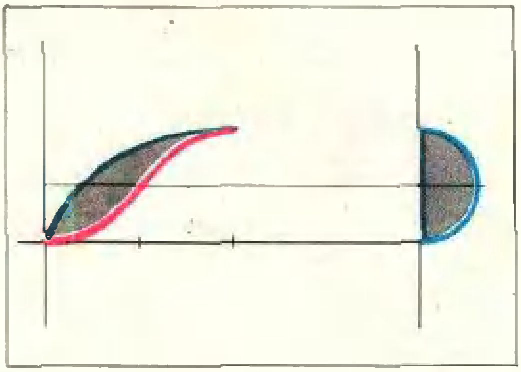


Рис. 6.

Вопрос о вычислении площадей сегментов циклоиды является менее элементарным. Гюйгенс (1629—1695) не без гордости писал: «Я первый промерил площадь той части циклоиды, которая получится, если отсчитать от вершины $^1/_4$ часть оси и провести параллель основанию. Эта часть составляет половину площади правильного шестиугольника, вписанного в образующий круг».

4. Таутохрона

«Циклоидальный маятник был изобретен Христианом Гюйгенсом, крупным ученым XVII столетия и гениальнейшим часовым мостером всех времен»

Зоммерфельд Механика

Галилей утверждал, что период колебаний математического маятника определяется только его длиной l и не зависит от угла φ его максимального размаха. Гюйгенс, выяснив, что это утверждение справедливо лишь для малых углов φ, решил построить маятник, период колебаний которого и в самом деле не зависел бы от φ (такой маятник называется *таутохронным* или *изохронным*).

Построение таутохронного маятника Гюйгенс разделил на два этапа:

1) нахождение кривой, по которой должен двигаться конец маятника (*таутохроны*);

2) нахождение подвески маятника, обеспечивающей движение его конца по таутохроне.

Мы начнем с поисков таутохроны (существование которой заранее не очевидно).

Конец математического маятника движется по дуге окружности точно так же, как тяжелая материальная точка — по желобу, контур которого совпадает с этой окружностью. Если пренебречь силами трения и сопротивления воздуха, то тяжелая точка, пущенная по круговому желобу без начальной скорости с высоты H, пройдя нижнее положение, снова поднимется на высоту H, и далее будет совершать периодические колебания, поднимаясь то в одну, то в другую сторону на высоту H. Неверное утверждение Галилея состояло в том, что при этом период колебаний $T(H)$ не зависит от H. Наша задача — определить, какой формы должен быть желоб, чтобы то, что утверждал Галилей, было верным.

Благодаря счастливой случайности (они в истории науки играют не последнюю роль), Гюйгенс изучал циклоиду (в связи с конкурсом Паскаля, 1658 год) в то самое время, когда искал таутохронный маятник. Именно циклоида и оказалась таутохроной! Вероятно, сам Гюйгенс этого заранее не ожидал (так можно понимать его слова: «я обнаружил пригодность ее (*циклоиды*) для измерения времени, исследуя ее по строгим правилам науки не подозревая ее применимости»).

Рассмотрим на желобе, сделанном по форме перевернутой циклоиды (рис. 7; r — радиус производящего круга) тяжелую материальную точку; пусть в начальный момент времени она находится на высоте H (в точке C_0 на рисунке). Попытаемся найти время τ, через которое она окажется в нижней точке B (вершине циклоиды). Тогда через 2τ она будет в точке $C_{2\tau}$ циклоиды, симметричной относительно вертикальной оси точке C_0, а через время $T=4\tau$ (полный период) вернется в точку C_0. Нас интересует зависимость τ от H.

Пусть в момент времени t тяжелая точка занимает положение C_t на высоте $h=h(t)$. Вектор скорости $\vec{v}(t)$ в момент времени t направлен по касательной к циклоиде в точке C_t; его длина $|\vec{v}(t)|$ (величина скорости) определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}=mg(H-h(t)),$$

т. е.

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{2g(H-h(t))}.$$

Посмотрим, как движется проекция нашей точки на вертикаль C_0B'. В момент времени t эта проекция занимает положение C_t', а в момент времени τ она окажется в точке B' (см. рис. 7), пройдя отрезок C_0B' длины H. Скорость $w(t)$ в момент времени t этого прямолинейного движения (в точке C_t' на рис. 7) — это проекция вектора скорости $\vec{v}(t)$ на

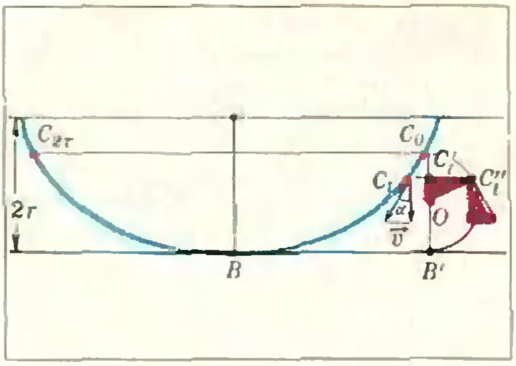


Рис. 7.

вертикаль: $w(t) = |\vec{v}(t)|\cos\alpha$, где α — угол между касательной к циклоиде и вертикалью. Поскольку (см. (1), с. 21) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2r-y}{2r}}$ и $y = 2r - h(t)$, то $\cos\alpha = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}$, а значит,

$$w(t) = \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sqrt{h(t)(H-h(t))}.$$

Итак, закон изменения скорости у нашего прямолинейного движения довольно сложный. Но Гюйгенс заметил (решающая догадка!), что при равномерном вращательном движении по окружности диаметра H вертикальная компонента вектора скорости имеет тот же вид, что и $w(t)$. Действительно, построим на отрезке C_0B' как на диаметре полуокружность, и пусть C_t'' — точка этой полуокружности, лежащая на высоте $h(t)$. Длина отрезка $C_t' C_t''$ равна $\sqrt{h(t)\cdot(H-h(t))}$.

Из подобия прямоугольных треугольников, окрашенных на рис. 7 в красный цвет (их стороны взаимно перпендикулярны: OC_t'' — радиус, в точке C_t'' проведены касательная к полуокружности и вертикаль), следует, что касательный к окружности в точке C_t'' вектор длины $\sqrt{\frac{g}{r}}\frac{H}{2}$ имеет вертикальную проекцию длины $w(t)$. Значит, когда наша точка C движется по циклоиде, соответствующая ей точка C'' равномерно вращается с угловой скоростью $\sqrt{\frac{g}{r}}$ радиан (не зависящей от H!). За время $\tau = \sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\pi$ точка C'' пройдет полуокружность C_0B', за то же время точка C' пройдет отрезок C_0B', а сама точка C — дугу циклоиды C_0B. Итак, мы не только доказали *таутохронность* циклоиды (т. е., что τ не зависит от H), но и нашли полный период колебаний:

$$T = 4\tau = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\ ^{*)}. \qquad (2)$$

Формула (2) настолько напоминает гипотетическую формулу Галилея для периода математического маятника длины l $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$, что было естественно попытаться воспользоваться (2) для обоснования последней. И в самом деле, с помощью (2) Гюйгенс получил первое строгое доказательство формулы для периода колебаний математического маятника при малых углах размаха φ. Он заметил, что при малых углах круговой желоб почти не отличается от циклоидального, и оставалось только понять, при каком соотношении между длиной l математического маятника и параметром r циклоиды это отличие наименьшее. Оказалось, что при $l = 4r$ (это не очевидный факт; мы еще к нему вернемся). Подставляя в (2) $r = l/4$, получаем знаменитую формулу для периода математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (при малых φ).

*) Фактически доказано, что движение тяжелой материальной точки по циклоидальному желобу можно представить в виде суммы равномерного вращательного движения с угловой скоростью, не зависящей от того, с какой высоты H пущена точка, и некоторого (вообще говоря, неравномерного) поступательного движения. При $H = 2r$ это легко вывести из кинематического определения циклоиды и соотношения (1), с. 21.

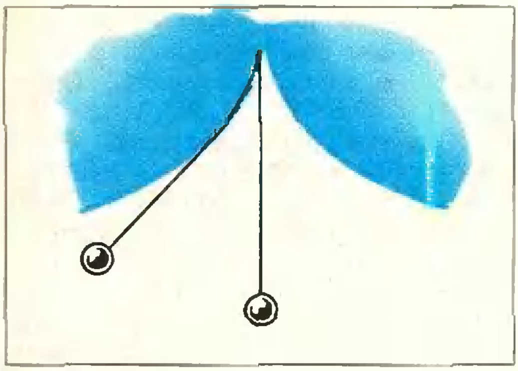


Рис. 8.

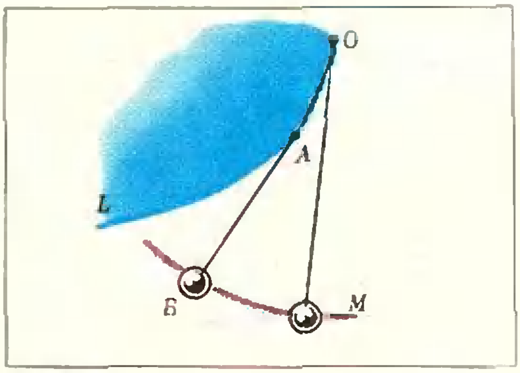


Рис. 9.

5. Циклоидальный маятник

Создавая первую модель часов, Гюйгенс надеялся скомпенсировать отклонение простого (математического) маятника от таутохронности, уменьшая в процессе отклонения его длину. Длину маятника можно регулировать, установив «щеки» (рис. 8), на которые в процессе отклонения будет наматываться нить подвески. Попытки э к с п е р и м е н т а л ь н о подобрать нужную зависимость длины маятника от угла отклонения не дали успеха, и Гюйгенс в следующих своих конструкциях часов устанавливает вместо «щек» ограничители амплитуды размаха. Когда же выяснилось, что циклоида — таутохрона, стало понятно, что форма «щек» должна быть такой, чтобы конец маятника двигался по циклоиде.

Гюйгенс искал форму «щек», рассуждая (в несколько вольном пересказе) примерно так. Пусть имеется препятствие, ограниченное кривой L, в некоторой точке O которого закреплена нерастяжимая нить длины l (рис. 9). Натянутую нить мы наматываем на препятствие, наблюдая за кривой M, которую описывает незакрепленный конец нити. Гюйгенс называл кривую M *разверткой* кривой L; теперь M называют *эвольвентой* кривой L, а L — *эволютой* кривой M (с одной эволютой связывается много эвольвент, отвечающих разным длинам l). Нам нужно найти эволюту циклоиды.

Кривая M состоит из таких точек B, что сумма длин отрезка касательной BA к кривой L в точке A и дуги AO кривой L равна l (см. рис. 9 — это в точности означает н а т я н у т о с т ь частично намотанной на L нити). Первая догадка Гюйгенса заключалась в том, что *касательная к кривой M в точке B перпендикулярна* к AB, т. е. что AB — касательная к кривой L в точке A — является одновременно нормалью к кривой M в точке B. Проще всего пояснить этот факт, исходя из кинематического определения кривой M. Вспомним, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и что при изменении действия сил вектор скорости не может измениться мгновенно (подробнее об этом см. в статье КР). «Обрубим» в точке A препятствие, но будем продолжать движение натянутой нити (рис. 10); тогда конец нити начнет двигаться по окружности с центром в точке A; векторная же скорость его в точке B не изменится; поэтому в точке B у кривой M и окружности с центром A будет общая касательная, перпендикулярная к радиусу BA.

Читатели статьи КР заметят также, что если рассматривать нити разной длины, то описанное движение конца нити продолжается до такого движения всей плоскости как твердой пластины, при котором точки кривой L являются *мгновенными центрами вращения*, а различные эвольвенты — траекториями точек плоскости. Из этого замечания сразу следует перпендикулярность

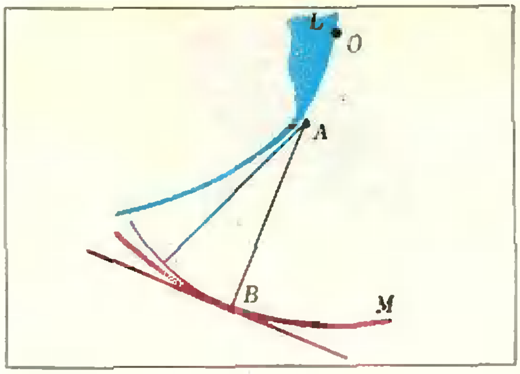


Рис. 10.

отрезка AB к касательной к кривой M в точке B.

Следующая догадка Гюйгенса состояла в том, что в «хорошей» ситуации *эволюта кривой восстанавливается однозначно* (помните, у одной кривой много эвольвент)! Дело в том, что нормали к кривой M в разных точках — это касательные к ее эволюте L. «Хорошую» же кривую по касательным можно восстановить: взяв много касательных, построить описанную ломаную и, «учащая» затем касательные, все лучше приближать кривую (говорят, что кривая *огибает* множество своих касательных).

Нам нужно найти кривую, касательные к которой будут нормалями к заданной циклоиде. Гюйгенс догадался, что этой кривой будет такая же циклоида, только поднятая на $2r$ и сдвинутая на полпериода (так, что ее вершины совпадают с остриями исходной циклоиды; см. рис. 11).

В самом деле, пусть $r=1$; l и l' — направляющие прямые соответственно нижней и верхней циклоид, O и O' — их начальные точки (l' на две единицы выше l; O' на π единиц правее O). Возьмем на прямой l точку C и рассмотрим положения производящих кругов (обеих циклоид), когда они касаются l в этой точке C. Пусть C' и C'' — диаметрально противоположные ей точки соответственно верхнего и нижнего кругов, A и A' — соответствующие точки циклоид. Дуга $CC''A$ равна по длине отрезку OC; поэтому она на π больше дуги $C'A'$, равной по длине отрезку $O'C'$. Отсюда $\sphericalangle C'CA' \cong \sphericalangle C''CA$, и точки A', C, A лежат на одной прямой. Остается заметить, что CA' — касательная к верхней циклоиде, а CA — нормаль к нижней (AC'' — касательная к ней).

Теперь мы знаем, что «щеки» таутохронного маятника должны быть циклоидальными, и что длина нити l должна равняться $4r$ (именно при таком значении l мы в качестве эвольвенты получим нужную циклоиду). При малых же углах размаха φ регулирующие «щеки» почти не влияют на длину маятника, и циклоида близка к дуге окружности радиуса $4r$ (см. конец предыдущего пункта).

6. Теорема Христофора Рена. Эволюты и вычисление длин кривых

Решив задачу о циклоидальном маятнике, Гюйгенс не остановился, понимая, что им создана замечательная математическая теория. Он пишет: «Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой».

Прежде всего Гюйгенс заметил, что когда нить маятника целиком наматывается на «щеку», то конец его оказывается в вершине циклоиды; значит, длина нити маятника ($4r$) совпадает с длиной половины арки циклоиды, и, значит, *длина арки циклоиды равна* $8r$! Эту т е о р е м у в 1658 году сформулировал и доказал Х р и с т о ф о р Р е н; Гюйгенс же, как мы видим, получил очень естественное доказательство этой теоремы.

Теорема Христофора Рена произвела на современников очень сильное впечатление и вот почему.

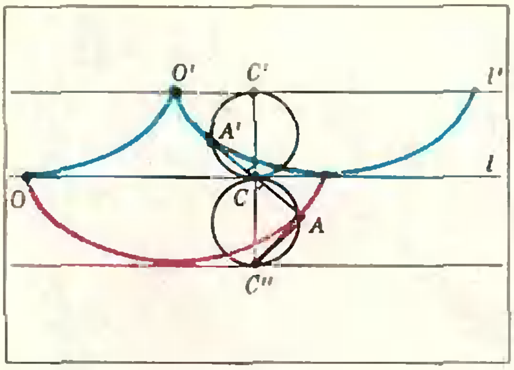


Рис. 11.

Вычислением длин кривых математики интересовались не меньше, чем вычислением площадей. Вначале, по аналогии с квадратурой (см. с. 21), они интересовались *ректификацией* — построением циркулем и линейкой отрезка соответствующей длины; позже стали интересоваться и *алгебраической ректификацией* — выражением длины кривой при помощи любых алгебраических операций. Мы уже говорили, что квадратуры некоторых фигур были найдены еще античными математиками; кривую же, для которой была бы возможна хотя бы алгебраическая ректификация, математики безуспешно искали вплоть до второй половины XVII века. Начали думать, что такой кривой вообще нет (так можно толковать слова Декарта «мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми»). Ректификация циклоиды, полученная Реном, опровергла эту точку зрения. Затем Ферма получил ректификации нескольких других кривых; однако во всех этих примерах фигурировали неалгебраические кривые, и скептики «уточнили» гипотезу, предположив, что невозможна алгебраическая ректификация алгебраических кривых (они справедливо объясняли, что, конечно, искусственно построить кривую, допускающую ректификацию, можно). Однако и в таком виде гипотеза оказалась неверной (первый опровергающий эту гипотезу пример был построен еще в 1657 году, но оставался неизвестным): Нейл, Хейрат и Ферма независимо предъявили в качестве алгебраической кривой, допускающей алгебраическую ректификацию, одну и ту же *полукубическую параболу* $ay^2 = x^3$. Совпадение это казалось мистическим до тех пор, пока Гюйгенс не вскрыл, в чем причина исключительности этой малозаметной кривой: она является эволютой параболы (точнее, эволютой параболы $y = x^2$ является кривая $y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$).

Теория Гюйгенса вообще максимально прояснила вопрос о ректификации. Результаты о циклоидальном маятнике и связанные с ними вопросы составили содержание большей части книги Гюйгенса «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году*).

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач с весьма почтенной репутацией.

Две задачи Галилея.

1. Докажите, что под действием силы тяжести материальная точка проходит все хорды окружности, оканчивающиеся в нижней точке окружности, за одно и то же время (аналогично — для хорд, начинающихся в верхней точке окружности).

2. Пусть есть кривая L (достаточно «хорошая») и точка A, не лежащая на L. Найдите на L такую точку B, чтобы отрезок AB проходился материальной точкой под действием силы тяжести за минимальное время.

Упражнения Ньютона

Пусть есть *центральное* поле, в котором силы пропорциональны расстоянию r до центра: $F(r) = kr$, $k > 0$.

Ньютон заметил, что в таком поле *гипоциклоиды* (см. КР) играют ту же роль, что циклоиды — в поле сил тяжести, а именно:

1) *гипоциклоиды являются (в этом поле) таутохронами* (Ньютон называл их изохронами);

2) *эволютами гипоциклоид являются подобные же гипоциклоиды* **).

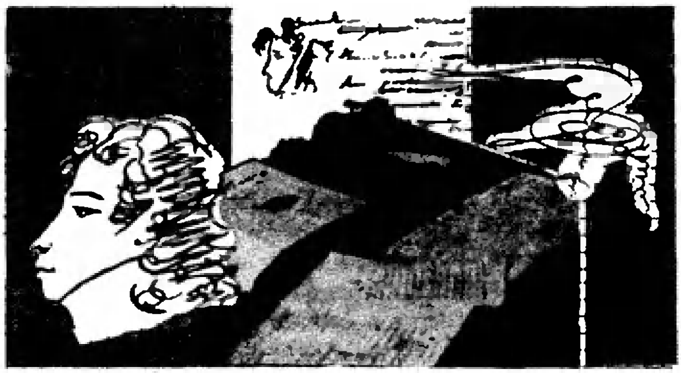
Постарайтесь решить задачи Ньютона (на эту тему можно написать целое математическое «сочинение»). Вспомните, как проводятся касательные к гипоциклоидам (статья КР), посмотрите еще раз решения аналогичных задач для циклоид и ... Мы ждем ваших решений.

**) О маятниковых часах см. статью С. Г. Гиндикина «Из истории маятниковых часов», «Квант», 1974, № 9.

**) Это — чисто геометрический факт, не относящийся к механике, но он позволяет устроить гипоциклоидальный маятник, а заодно — вычислить длину гипоциклоиды.

В. Я. Френкель

Пушкин и точные науки



«Бедный Пушкин»

Года два назад, отдыхая на скамейке в ленинградском сквере, я оказался невольным свидетелем такого разговора: «Бедный Пушкин,— сказала своей соседке молодая женщина, складывая свежий номер «Недели». — Живого места на человеке не оставили. Теперь вот пишут «Пушкин и минералогия» — о драгоценных камнях в его жизни».

...«Пушкин и точные науки». Не вызовет ли это заглавие сходный вздох сожаления, не покажется ли оно слишком претенциозным, отдающим в какой-то степени дань моде? Ведь речь пойдет не о применении новых математических методов в изучении стихов поэта (тема вполне содержательная, которую разрабатывают крупные математики). Мы просто посмотрим, как на страницах произведений Пушкина нашли свое отражение некоторые чисто научные термины. Начало прошлого века было ознаменовано замечательными открытиями в физике, химии, математике. Одинаково интересно, если у поэта, во всем стремившегося идти «с веком наравне», такие упоминания редки или часты.

Словарь языка Пушкина

Ответить на вопрос, в какой мере точные науки нашли свое прямое (и в какой-то степени внешнее) отражение в произведениях Пушкина, оказывается задачей не сложной. Дело в том, что к 150-летию со дня рождения поэта Институтом русской литературы (Пушкинским Домом) был издан «Словарь языка Пушкина». Это поистине фундаментальный труд! Каждый из четырех томов «Словаря» содержит по 800 страниц; сюда собраны все слова, использованные Пушкиным в его поэтических и прозаических произведениях (включая письма). 16 000 слов, построенных в алфавитном порядке, истолкованы в том смысле, который им придавался в пушкинское время. Указана «частота» их использования и дается ссылка на том и страницу Академического издания полного собрания сочинений поэта (подготовленного и изданного к 100-летию со дня смерти поэта, к концу тридцатых годов), где встречается соответствующее слово.

Итак, имея «Словарь» пушкинского языка, проще всего начать с того, что выписать имеющие прямое отношение к точным наукам слова, которыми мог пользоваться Пушкин, и поискать их в нем. Именно так и сделал автор настоящей статьи. И число «попаданий» оказалось весьма невелико.

Такая ситуация находится в соответствии с «традиционным» образом Пушкина, который, по воспоминаниям его сестры Ольги, в детстве плакал над задачами по арифметике. Много лет спустя, 1 января 1834 года, поэт записал в своем «Дневнике»: «Меня спрашивали, доволен ли я моим камер-юнкерством. Доволен, потому что государь имел намерение отличить меня, а не сделать смешным, а по мне хоть в камер-пажи, только б не заставили учиться французским вокабулам и арифметике».

Иван Пущин, о котором Пушкин писал «Мой первый друг, мой друг бесценный», рассказывал в своих воспоминаниях о том, как Яков Иванович Карцов, преподававший в лицее физику и математику, однажды вызвал к доске Пушкина и предложил ему решить алгебраическую задачу. Пушкин сосредоточенно и молча писал на доске какие-то цифры, переминался с ноги на ногу. Наконец, Карцов спросил его: «Ну, что же у Вас получилось? Чему равняется икс?» Пушкин улыбнулся, сверкнув зубами, и ответил: «Нулю!» «Хорошо, — подытожил Карцов. — У Вас, Пушкин, все в моем классе кончается нулем. Садитесь на место и пишите стихи».

Слова, слова, слова ...

Слово «наука», с которого имеет смысл начать разбор, упоминается у Пушкина довольно часто (75 раз). Это, прежде всего, «наука страсти нежной», но вместе с тем, и наука, о которой говорит Годунов: «Учись мой сын! Наука сокращает нам опыты быстротекущей жизни!» «Математику» Пушкин использовал трижды; по три раза приходится также на «геометрию» и «алгебру». «Физика» встречается у него лишь однажды, «астрономия» — ни разу (правда, упоминается «астрология»). Для сравнения заметим, например, что существительное «любовь» насчитывается 630 раз, а глагол «любить» — 614.

В рамках наших кратких заметок этого материала оказывается достаточно.

Представим собранные сведения по алфавиту. Начнем с «астрологии» (точнее с «астролога»). Одним из первых приглашенных при Петре Великом в Россию академиков-физиков был Крафт. Он заведовал физическим кабинетом Российской Академии наук и был, как пишет Пушкин, «должностным астрологом» при Анне Иоанновне. В «Истории Петра» Пушкин замечает: «Сохранилось в календаре 1730 г. его [Крафта] предсказание о вскрытии Невы 9-го апреля (что и сбылось)».

«Алгебра» вошла у Пушкина в фразу, ставшую поистине крылатой. Сальери из маленькой трагедии Пушкина «Моцарт и Сальери» говорит: «Звуки умертвив, музыку я разъял как труп. Поверил я алгеброй гармонию». Обычно считается, что эта фраза проводит разделение между искусством, олицетворяющемся в образе вдохновенного Моцарта, и ремесленничеством, которое ему здесь противопоставляется. Часто и без всяких оснований смысл этой фразы сводят к противопоставлению искусства и науки. Мы увидим вскоре, как далек от этого сам Пушкин.

В другой раз «алгебра» — и снова в контексте противопоставления — упоминается в резкой рецензии Пушкина на «Историю русского народа», написанную его идейным противником, редактором журнала «Московский телеграф» Н. А. Полевым. Пушкин пишет: «Ум человеческий по простонародному выражению — не пророк, а угадчик. Он видит общий ход вещей и может выводить из оного глубокие предположения, часто оправданные временем; но невозможно ему предвидеть случая — мощного орудия провидения». И Пушкин заключает: «Но провидение — не алгебра». (Отметим, что в стихотворении о научном творчестве, оставшемся незаконченным, Пушкин дает такие определения случаю, опыту и гению: «Случай — изобретательный слепец», «Опыт — сын ошибок трудных» и, наконец, «Гений — парадоксов друг». Академик С. И. Вавилов специально отмечал глубину этих пушкинских определений.)

Укажем для полноты, что в третий раз «алгебра» упоминается также в критической статье. Поэт сравнивает татарское иго с игом мавританским (в Испании) и пишет: «Татары не походили на мавров. Они, завоевав Россию, не подарили ей ни алгебры, ни Аристотеля».

В критической статье, посвященной работе Кюхельбекера, Пушкин пишет: «Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии». Знаменательная фраза! Профессору Гёттингенского университета Давиду Гильберту, одному из крупнейших математиков нашего века, однажды сказали, что его студент оставил математику, решив посвятить себя поэзии. «Меня это не удивляет,— ответил Гильберт,— у него чувствовался недостаток фантазии!» Вдохновение, о котором пишет Пушкин, это нечто более чем родственное гильбертовской фантазии.

Пушкинское суждение о геометрии было не случайным; примерно в то же время, но уже по другому случаю, он записывает в своей тетради: «Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии», поменяв местами поэзию и геометрию и как бы подчеркивая их равноправие перед лицом вдохновения. Академик М. П. Алексеев замечает, что такое сопоставление не случайно. В 1826 году, когда эти фразы были записаны Пушкиным, Н. И. Лобачевский уже говорил о своей новой геометрии, и отзвуки его речи в Казанском университете, произнесенной 24 февраля 1826 года, могли достигнуть и Пушкина.

Всегда соблазнительно проследить, не пересекались ли жизненные судьбы двух гениев, живших в одно и то же время, хотя и проявившихся в разных областях человеческой культуры. По мнению М. П. Алексеева, есть основания полагать, что имена Пушкина и Лобачевского можно соединить отнюдь не механически. Прежде всего, И. Великопольский, брат жены Лобачевского, хорошо знал Пушкина, виделся с ним неоднократно, переписывался и даже обменялся стихотворениями (весьма колкими). Есть прямые свидетельства того, как любил Лобачевский поэзию Пушкина: его стихи он часто читал наизусть в семейном кругу. Во время поездки в самом начале 30-х годов в Оренбург (в поисках материала для «Истории Пугачевского бунта») Пушкин остановился в Казани — городе, где прожил всю свою жизнь Лобачевский. Здесь Пушкин провел несколько дней в доме профессора Фукса — коллеги Лобачевского по университету. У Фукса и его общительной супруги каждый вечер бывало много гостей; не исключено, что среди них в «пушкинские дни» был и Лобачевский. Правда, документальных свидетельств обнаружить не удалось. Но я полагаю, что именно эти поиски и привели Л. Б. Модзалевского — пушкиниста и сына пушкиниста — к изучению биографии Лобачевского. В результате Модзалевский стал автором одной из наиболее содержательных книг о великом отечественном математике.

Слова «физика» и «химия» Пушкиным используются по одному разу. «Химия» — в неинтересном контексте, а вот «физика» — очень звучно.

В ноябре 1824 года он написал цикл стихотворений «Подражания Корану», своего рода поэтический пересказ древней книги. К некоторым строкам Пушкин сделал примечания. Так, к строфе

Земля недвижна — неба своды,
Творец, поддержаны тобой,
Да не падут на сушь и воды
И не подавят нас собой.—

он записал: «Плохая физика, но зато какая смелая поэзия!»

Приведем пример, к которому пушкинская ремарка подходит не менее. В известном стихотворении «Портрет», посвященном красавице Закревской, он писал:

С своей пылающей душой,
С своими бурными страстями
О жены Севера, меж вами
Она является порой
И мимо всех условий света
Стремится до утраты сил,
Как беззаконная комета
В кругу расчисленном светил.

Очевидно, однако, что движение кометы столь же расчисленно (закономерно), как и движение небесных светил: нет большего «законника», чем природа. Если нам иногда и кажется, что поведение ее объектов противоречит законам, то это просто значит, что мы еще не знаем других более сложных законов, которым они подчиняются!

Укажем, наконец, известную эпиграмму Пушкина, в которой он воспроизводит спор между представителями различных философских школ древности, касающийся сущности физически содержательного понятия движения. Эпиграмма эта, написанная в Михайловском осенью 1825 года, так и называется — «Движение»:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

«Мудрец брадатый» — это древнегреческий философ Зенон Элейский (5 в. до н. э.), а его оппонент («другой») — Антисфен (род. около 440 г. до н. э.). В восьми строках своей эпиграммы великий поэт с удивительной емкостью и выразительностью сумел передать сущность спора; заключительные строчки призваны предостеречь тех, кто счел «ответ замысловатый» Антисфена исчерпывающим: Пушкин напоминает о галилеевской (коперниковской) гелиоцентрической системе мира, согласно которой движение Солнца — кажущееся явление, иллюстрирующее относительный характер этого движения.

Чтобы дать представление о той глубине, с которой пушкинисты вникают в историю возникновения стихотворений поэта, в явный и скрытый смысл каждой их строчки, замечу, что исчерпывающему анализу пушкинского «Движения» в одной из статей академика М. П. Алексеева посвящено 18 страниц убористого текста.

Заключительные замечания

Перечисленные примеры носят, конечно, иллюстративный характер и являются лишь «нулевым приближением» к содержательной теме «Пушкин и наука». Глубокие связи Пушкина с современной ему наукой весьма многообразны. В них органически включены его отношения с рядом ученых (прежде всего, гуманитариев). Одним из негуманитариев был «русский Калиостро»*) — замечательный изобретатель П. Шиллинг, за этот свой талант получивший такое «чародейное» прозвище. Шиллинг прославился не только изобретением «телеграфии по проводам»; известны его изобретения в морском деле, его работы по электричеству. Привлекает внимание и также разработана тема «Пушкин и Гумбольдт»**).

Однако наиболее ярко широта интересов Пушкина, понимание им роли науки в жизни общества проявились в его журналистской деятельности и были связаны с изданием журнала «Современник» — предприятия, на которое он возлагал столько надежд и в которое внес столько сил в последние полтора — два года жизни.

Для русской журналистики 20—30 гг. прошлого века публикация научно-популярных статей носила, можно сказать, традиционный характер. Пушкинский «Современник» и в этом плане был на несравненной высоте. Его издатель не хотел просто перепечатывать научно-популярные обзоры из зарубежных журналов — он привлек к их написанию своего соотечественника, князя П. Б. Козловского, профессионального дипломата и глубоко образованного человека. В двух из четырех прижизненно вышедших номерах пушкинского «Современника» были напечатаны статьи Козловского. Первая из них — «Разбор Парижского Ежегодника», говоря современным языком, рецензия на это издание, выпускавшееся под наблюдением секретаря Французской Академии наук Франсуа Араго. В своей развернутой рецензии Козловский не только пишет о последних успехах французской науки, но и горячо ратует за распространение просвещения у себя на родине, в России. Задача и благородная, и смелая, если помнить, что в глазах самодержавия просвещение было синонимом свободы. Следующая статья Козловского, помещенная в 3-м томе «Современника», называлась «О надежде». Это было первое в русской литературе популярное изложение основ теории вероятностей. Последний термин в то время у нас еще отсутствовал, и Козловский предлагал называть эту теорию «теорией удобосбытностей». Любопытно видеть на страницах «Современника» рядом с поэзией Пушкина, Жуковского, Тютчева, с прозой Гоголя алгебраические формулы, треугольник Паскаля и даже график, которым Козловский заканчивал свою статью.

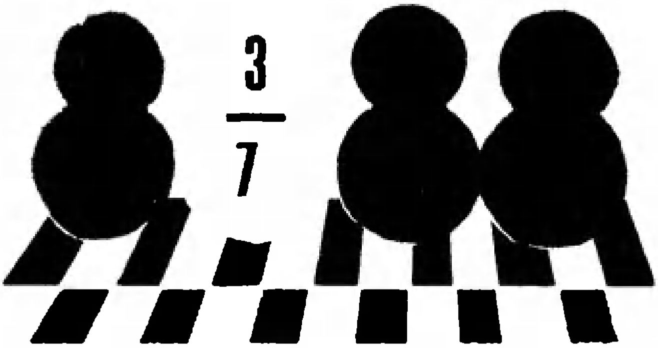
---

*) Граф Калиостро (настоящее имя — Иосиф Бальзамо (1743—1795)) — авантюрист, прославившийся всевозможными «чародействами». Его имя, однако, было синонимом не только авантюризма и шарлатанства, но и вообще всякого впечатляющего и ошеломляющего воображение зрелища. Примерно в этом контексте и следует понимать прозвище, данное Шиллингу,— настоящему чародею, который раскрывал перед людьми те «обыкновенные чудеса», которые таит в себе истинная наука.

**) Александр Гумбольдт (1769—1859) — немецкий естествоиспытатель и географ. Много путешествовал по Южной и Центральной Америке. Весной 1829 года приехал в Россию. В Петербурге встречался со многими учеными и писателями, в числе которых были П. А. Вяземский и А. С. Пушкин. Совершил в этом же году полугодовое путешествие в Сибирь. Его научные связи с русскими учеными продолжались в течение всей его долгой жизни.

В. Н. Вагутен

Близкие дроби



В этой заметке рассказано о некоторых любопытных последовательностях дробей и решена задача М298 из «Задачника «Кванта». Хотя в конце от читателя требуется знакомство с методом координат, векторами и принципом математической индукции, но бо́льшая часть заметки будет понятна даже тем, кто лишь недавно познакомился с дробями. Автор надеется, что старшеклассники и учителя найдут здесь удобный материал для занятий с учениками 5—6 классов. Упражнения включают существенную часть содержания статьи.

1. Ряды Фарея. Наблюдения

Выпишем все правильные дроби, у которых знаменатель не больше 7:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$$

(мы пропустили *сократимые* дроби: $\frac{2}{4},\frac{2}{6},\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{6}$ — из дробей, представляющих одно и то же число, мы выбираем о д н у дробь, а именно ту, у которой числитель и знаменатель наименьшие).

Теперь запишем те же дроби в порядке возрастания:

$$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}. \quad (1)$$

Проверьте, что в ряду (1) каждая дробь действительно больше предыдущей

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{6\cdot7},\quad \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5\cdot6},$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4\cdot5},\quad \frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4\cdot7},\ \ldots$$

При этом соблюдается интересная закономерность: *числитель разности двух соседних дробей всегда получается равным единице*, точнее,

А. *Для любых двух соседних дробей* $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ $\left(где\ \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$ *выполняется равенство*

$$bc-ad=1.$$

Какие еще закономерности присущи ряду дробей (1)?

Нетрудно обнаружить, что сумма двух дробей, симметрично стоящих в этом ряду, равна 1. Интересно, заметил ли читатель, что

Б. *Каждая дробь получается из соседних с ней двух дробей следующим образом: надо сложить их числители и разделить полученное число на сумму знаменателей.*

В самом деле,

$$\frac{1}{6}=\frac{1+1}{7+5},\quad \frac{1}{5}=\frac{1+1}{6+4},$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1+2}{5+7},\quad \frac{2}{7}=\frac{1+1}{4+3},\quad \frac{1}{3}=\frac{2+2}{7+5},$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1+3}{3+7},\quad \frac{3}{7}=\frac{2+1}{5+2},\quad \frac{1}{2}=\frac{3+4}{7+7}\ —$$

и так далее!

F_1	
F_2	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$
...	....

Таблица 1. Ряды Фарея.

Точно так же, как выписана строчка (1) из правильных дробей со знаменателем, не превосходящим 7, можно выписать в порядке возрастания дроби со знаменателем, не превосходящим n. Расположим подряд такие строчки для $n=1, 2, \ldots, 7$ в виде таблицы 1.

Первая строка и боковые стены» из дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ придают нашей таблице более законченный вид.

Упражнение 1. Проверьте, что закономерности **А** и **Б**, которые мы заметили в седьмой строчке таблицы, имеют место и во всех предыдущих строчках.

Новые дроби в каждой строчке мы выделили красным цветом.

Для новых дробей наблюдение **Б** можно уточнить: у дроби, возникающей между двумя старыми, числитель равен сумме их числителей, знаменатель — сумме знаменателей. Таким образом, можно предложить простое правило, по которому получается новая n-я строчка.

В. *Нужно отметить в $(n-1)$-й строчке все такие пары соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, у которых сумма знаменателей равна n, и между ними вставить дроби $\frac{a+c}{b+d}$* (они всегда получаются несократимыми).

Проделаем эту операцию с седьмой строчкой. Отметим пары соседних дробей, у которых сумма знаменателей равна 8. Это такие пары

$$\frac{0}{1} \text{ и } \frac{1}{7};\quad \frac{1}{3} \text{ и } \frac{2}{5};\quad \frac{3}{5} \text{ и } \frac{2}{3};\quad \frac{6}{7} \text{ и } \frac{1}{1}.$$

Вставим между ними соответственно дроби $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ и получим восьмую строчку

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{1}.$$

Упражнение 2. Проделайте аналогичную операцию с восьмой строчкой и проверьте, что таким образом получается строчка всех несократимых дробей со знаменателем не больше 9, идущих в порядке возрастания.

Упражнение 3. Проверьте, что в восьмой и девятой строчках выполняются закономерности **А** и **Б**.

Строчка всех несократимых дробей $\frac{p}{q}$, у которых $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$ (n — данное натуральное число), расположенных в возрастающем порядке, имеет в теории чисел специальное название — *ряд Фарея*, и обозначается иногда через F_n. Имя математика Фарея таким строчкам присвоил великий французский математик Коши. Фарей заметил интересные закономерности в этом ряду дробей, а Коши, обратив внимание на наблюдения Фарея, в 1816 году опубликовал их доказательство. Однако вполне возможно, что эти закономерности были известны математикам и раньше.

Дадим два определения, связанные с нашими наблюдениями.

Определение 1. Назовем две дроби $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ близкими, если $bc-ad$ равно 1 или -1.

Упражнение 4. Выберите из дробей (1) все пары близких дробей.

Определение 2. Назовем *медиантой* двух дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

(Медианта несократимых дробей может оказаться сократимой дробью; приведите пример.)

2. Свойства близких дробей

Теперь наши гипотезы можно сформулировать коротко так: в любом n-м ряду Фарея (n-й строке таблицы 1)

А. *Соседние дроби близки друг другу.*

В. *Каждая новая дробь m/n является медиантой соседних с ней дробей.*

В задаче М298 из «Задачника «Кванта» как раз и требовалось доказать свойство **А**: если $p/q<r/s$ — соседние дроби ряда F_n, то $qr-ps=1$. Но оказывается, что значительно легче доказывать одновременно оба свойства — и **А**, и **В**. Мы наметим ниже целых три различных доказательства: одно — в пунктах **3—4**, второе — в пункте **5**, третье — в пункте **6**. Укажем несколько простых свойств, характеризующих близкие дроби и медианты.

а) *Для любых двух дробей a/b и c/d их разность по модулю не меньше $1/bd$:*

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| \geqslant \frac{1}{bd}, \qquad (2)$$

причем знак равенства в (2) получается в том и только в том случае, если дроби a/b и c/d близки. (Это объясняет выбор термина: *близкие* дроби.)

б) *Медианта двух дробей всегда заключена между ними, т. е. если $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,* то

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}. \qquad (3)$$

в) *Если две дроби близки друг к другу, то обе они несократимы.*

г) *Если две дроби близки друг к другу, то их медианта близка к каждой из них.*

д) *Если две дроби близки друг к другу, то их знаменатели взаимно просты и их числители взаимно просты *).*

е*) *Из всех дробей, заключенных между двумя близкими дробями, наименьший знаменатель имеет их медианта.*

Упражнение 5. Докажите свойства **а)** — **д)**.

Допустим теперь, что читатель не только проделал упражнение 2 — получил из восьмой строчки девятую — но, продолжая действовать дальше по правилу **В**, получает десятую строчку, одиннадцатую и так далее.

Из свойств **б)**, **в)**, **г)** следует, что во всех новых строчках сохраняются такие закономерности:

1) дроби-медианты, которые мы вставим, будут несократимы;

2) дроби идут в порядке возрастания;

3) любые две соседние дроби близки друг другу.

Оставшийся более трудный вопрос состоит в следующем. Попадут ли по правилу **В** в n-ю строчку все несократимые дроби со знаменателем n или может оказаться, что какие-то будут пропущены? Оказывается, что все такие дроби будут обязательно вставлены, т. е. мы действительно получим строчку F_n целиком. На этом месте мы советуем читателю остановиться и попробовать придумать доказательство самостоятельно (один из путей — доказать свойство **е**, отмеченное звездочкой).

Мы же пока сделаем небольшое отступление и обсудим вопрос: сколько всего дробей в n-й строчке нашей таблицы?

*) Целые числа a и b называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, бо́льших 1.

3. Функция Эйлера. Число красных дробей

Пусть у нас имеется натуральное число n. Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие n, и выберем из них те, которые взаимно просты с числом n. Количество этих чисел обозначим через $\varphi(n)$.

Например, для $n=8$ такими числами будут 1, 3, 5, 7, и тем самым $\varphi(8)=4$.

Итак, каждому натуральному числу n сопоставлено число $\varphi(n)$. Это соответствие φ называется *функцией Эйлера*.

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:

1) $\varphi(n) < n$.

2) Если $n=p$ — простое число, то $\varphi(p)=p-1$.

3) Для $n>2$ число $\varphi(n)$ четно.

4) Если $n=p^{\alpha}$ — степень простого числа p, то

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

5*) Если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

6) Общая формула для $\varphi(n)$ такова:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right);$$

здесь $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа, на которые делится n. (Эта формула доказана в статье «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10.)

Доказать все эти свойства мы предлагаем читателю. Объясним только свойство 3). Все числа, меньшие, чем n и взаимно простые с n, можно разбить на пары: каждая пара состоит из таких чисел q, s, что $q+s=n$. Таким образом, число $\varphi(n)$ — четно.

Число к р а с н ы х дробей в n-й строчке F_n, очевидно, равно $\varphi(n)$, так как несократимых дробей m/n ($0 \leqslant m/n \leqslant 1$) со знаменателем n столько же, сколько натуральных чисел m, меньших, чем n, и взаимно простых с n.

Вопрос о том, сколько всего членов содержит n-й ряд Фарея F_n, обсуждает в своем письме читатель «Кванта» А. К и т а е в из Ленинграда. Ясно, что это число — обозначим его $\Phi(n)$ — равно

$\Phi(n) = 1+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n)$, поскольку $\Phi(1)=2$ и $\Phi(n)=\Phi(n-1)+\varphi(n)$ (см. таблицу 2). Простой формулы для $\Phi(n)$, видимо, не существует. Но интересно, что, несмотря на крайне нерегулярное поведение функции Эйлера $\varphi(n)$ (отношение $\dfrac{\varphi(n)}{n}$ бывает сколь угодно близко и к 0, и к 1), для $\Phi(n)$ можно доказать такое предельное соотношение:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	…
$\Phi(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	33	43	47	59	65	73	81	…

Т а б л и ц а 2. Функция Эйлера и число дробей F_n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \approx 0{,}305\ldots,$$

т. е. $\Phi(x)$ при больших x возрастает «приблизительно по параболе»: $\Phi(x) \approx \dfrac{3}{\pi^2}x^2$.

Это — одна из красивых теорем, полученных австрийским математиком Ф. Мертенсом (1874 г.).

4. Соседние знаменатели

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в конце пункта 3, и объясним, почему, действуя по правилу **В**, мы получим все $\varphi(n)$ несократимых дробей со знаменателем n. Сделаем еще одно наблюдение.

Обратим внимание на знаменатели дробей в таблице 1. Составим для удобства из них новую таблицу 3. Правило **В** позволяет продолжать «таблицу знаменателей» (не заботясь о числителях) следующим образом.

В′. *Нужно отметить в $(n-1)$-й строчке все пары q, s соседних чисел, сумма которых равна n, и между ними поставить n.*

Как мы уже говорили, соседние знаменатели в таблице 1 — т. е. соседние числа q и s в таблице 3 — взаимно просты (см. свойство **Д**, пункт 2). Заметим теперь, что, вставляя суммы $q+s=n$ в n-ю строчку, мы встречаем к а ж д о е из $\varphi(n)$ возможных представлений n в виде суммы взаимно простых чисел (причем ровно один раз). Например, в девятой строчке:

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 2 3 4 1
1 5 4 3 5 2 5 3 4 5 1
1 6 5 4 3 5 2 5 3 4 6 1
1 7 6 5 4 7 3 5 7 2 7 5 3 7 4 5 6 7 1
1 8 7 6 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 6 7 8 1
1 9 8 7 6 5 9 4 7 3 8 5 7 9 2 9 7 5 8 3 7 4 9 5 6 7 8 9 1
. . . .

Т а б л и ц а 3. Знаменатели рядов Фарея.

$$9=1+8,\ 9=5+4,\ 9=7+2,$$
$$9=2+7,\ 9=4+5,\ 9=8+1.$$

У п р а ж н е н и е 6. Напишите еще три строчки таблицы 3 и проверьте, что все $\varphi(n)$ представлений знаменателя n в виде суммы двух соседних знаменателей $n=q+s$ встречаются ровно по одному разу.

Наблюдение, сделанное в упражнении 6, сформулируем так.

Г. *В n-й строчке таблицы 3 каждое число, взаимно простое с n, бывает «соседом» ровно дважды: один раз — слева и один раз — справа.*

У п р а ж н е н и е 7. Докажите, что если свойство **Г** выполняется во всех предыдущих строчках таблицы 3, то оно должно выполняться и в n-й строчке, полученной по правилу **В′**.

Из упражнения 7 вытекает (согласно принципу математической индукции), что если новые строчки таблицы 3 получать по правилу **В′**, то во всех строчках свойство **Г** будет выполняться, а следовательно, в n-й строчке будет ровно $\varphi(n)$ новых членов!

У п р а ж н е н и е 8. Пусть мы, начав со строчки $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$, несколько раз проделываем такую операцию: между двумя уже написанными дробями вставляем их медианту. Докажите, что для любой строчки, которую можно таким образом получить, выполняются свойства **А** и **Б**.

Из результата этой задачи, в частности, следует, что свойства **А** и **Б** выполняются для каждой строчки таблицы 4, где между к а ж д ы м и двумя дробями в следующей строчке вставляется медианта.

У п р а ж н е н и е 9. Докажите, что в таблице 4 в каждой строчке, начиная с n-й, встречаются все несократимые дроби со знаменателем n, причем каждая — один раз.

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{1}$
. . . .

Т а б л и ц а 4. «Ускоренный» ряд Фарея.

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
. . . .

Т а б л и ц а 5. *Ряды Гальперина.*

Таблица 4 тесно связана с таблицей целых чисел, которая рассматривалась в задаче М233 Г. А. Г а л ь п е р и н а из «Задачника «Кванта». Эта таблица 5 появляется не только в знаменателях дробей таблицы 4, но и в их числителях (во второй «половине» таблицы 4, — начиная со второй строчки, во второй «четверти», — начиная с третьей строчки и так далее)!

5. Второе доказательство

Приведем короткое доказательство свойств **А** и **В** рядов Фарея F_n, опирающееся на свойство **а)** близких дробей (такое доказательство приведено в книге [2]).

Доказательство тоже проводится по индукции. Предположим, что для всех строчек $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, предшествующих F_n, свойства **А** и **В** доказаны. Пусть некоторая дробь m/n (со знаменателем n) заключена между соседними дробями p/q и r/s из F_{n-1}, $p/q<r/s$ (значит, $qr-ps=1$).

Тогда

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{qn}$$

и (3)

$$\frac{r}{s}-\frac{m}{n}\geqslant\frac{1}{sn}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{q+s}{nqs};$$

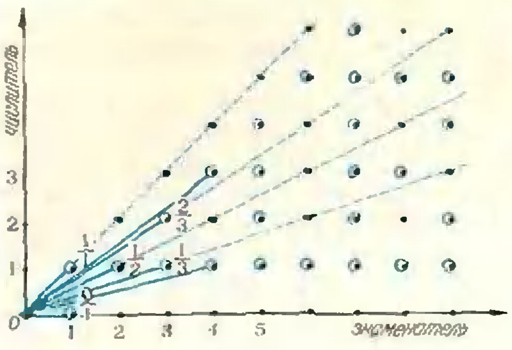


Рис. 1.

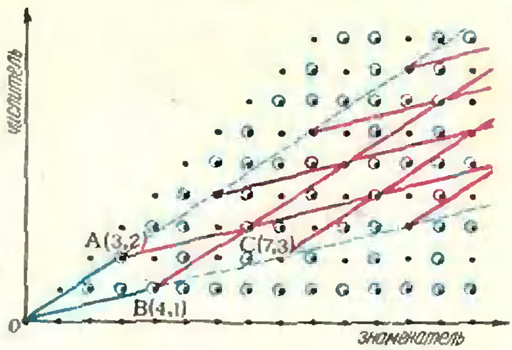


Рис. 2.

$$\frac{q+s}{n} \leqslant qr - ps = 1;$$

$$q + s \leqslant n.$$

Строгое неравенство $q+s < n$ выполняться не может: в этом случае дробь $(p+r)/(q+s)$ встречалась бы между p/q и r/s уже в F_{n-1} (даже в F_{q+s}).

Следовательно,

$$n = q + s, \qquad (4)$$

а поэтому неравенства (3) также должны быть равенствами, откуда

$$mq - np = 1, \quad nr - ms = 1. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $m = p + r$.

Итак, мы доказали, что m/n — медианта дробей p/q и r/s и близка к каждой из них. (По существу, мы здесь доказали свойство е) близких дробей.) Значит, свойства **А** и **В** верны и для F_n.

Упражнение 10. Докажите, что:
а) если дроби m/n и p/q, где $q < n$ — близки, то они — соседние дроби в F_n;
б) любая дробь, близкая к m/n, равна одной из дробей $(m+kr)/(n+ks)$, либо $(m+kp)/(n+kq)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а p/q и r/s — соседи m/n в F_n.

Упражнение 11. Пусть в последовательности дробей $\frac{0}{1} \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_N \leqslant \frac{1}{1}$ каждые две соседние дроби близки друг к другу. Докажите, что эту последовательность можно получить процедурой, описанной в упражнении 8.

Геометрическая интерпретация, к которой мы переходим, значительно прояснит простые причины закономерностей **А** и **В**, а заодно подскажет идею еще одного доказательства.

6. Решетки и параллелограммы

Возьмем лист клетчатой бумаги и введем на нем систему координат. Две перпендикулярные линии сетки примем за оси координат, а сторону клетки — за единицу масштаба.

Поставим в соответствие каждой дроби m/n ($0 \leqslant m/n \leqslant 1$, $n > 0$) точку с координатами (n, m). (На рисунке 1 — это черные точки.) Вместо «точка» мы иногда будем говорить «дробь».

Несократимые дроби на рисунке 1 обведены голубыми кружками, а те из них, знаменатели которых не больше 4, соединены голубыми отрезками с началом координат O.

Сформулируем несколько свойств дробей на геометрическом языке. Пусть p/q и r/s — две дроби, A (q, p) и B (s, r) — соответствующие им точки.

а) $p/q = r/s$ в том и только том случае, если точки A и B лежат на одном луче с началом O. Ближайший к O узел на этом луче соответствует несократимой дроби.

Дальше мы считаем, что $p/q \neq r/s$.

б) $p/q > r/s$, если луч OA составляет больший угол с горизонтальной осью координат, чем луч OB.

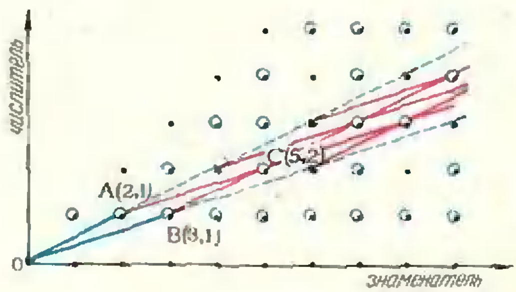


Рис. 3.

в) Дробь $(p+r)/(q+s)$ соответствует четвертой вершине $C(p+r, q+s)$ параллелограмма $OACB$ (рис. 2). Для тех, кто знаком с векторами, запишем это так: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. (Мы видим, что созвучность терминов «медианта» и «медиана» не случайна: отрезок OC идет как раз по медиане треугольника OAB.)

г) $|qr-ps|$ равно удвоенной площади ΔAOB, то есть площади параллелограмма $OACB$.

д*) Внутри и на сторонах этого параллелограмма $OACB$ в том и только в том случае нет узлов (за исключением вершин), когда $|qr-ps|=1$.

е*) В этом случае точка C — ближайший к O узел сетки, лежащей внутри угла AOB.

Упражнение 12. Докажите свойства а)—г).

Ключ к объяснению закономерности ряда Фарея — свойства д) и е*).

Посмотрим внимательно на рисунки 2 и 3. На них внутренность угла AOB разрезана прямыми на параллелограммы, конгруэнтные параллелограмму $OACB$. Все их вершины лежат в узлах клетчатой бумаги. Но на рисунке 2 (где площадь $OACB$ больше 1) многие узлы внутри угла AOB не являются вершинами этих параллелограммов. А на рисунке 3 (здесь площадь $OACB$ равна 1) любой узел внутри угла AOB — вершина такого параллелограмма, т. е. для любого такого узла $M(n, m)$ найдутся натуральные числа x и y, для которых

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}. \qquad (6)$$

Векторное равенство (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} px+ry=m, \\ qx+sy=n. \end{cases} \qquad (7)$$

*) Их можно доказать, опираясь на свойства решеток на плоскости (см. статьи А. А. Егорова и Н. Б. Васильева, «Квант», 1974, № 12.

Упражнение 13. а) Докажите, что если $|qr-ps|=1$, где p, q, r, s — целые числа, то система (7) при любых целых m и n имеет решения в целых числах x и y.

б*) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

в) Выведите из а), что для двух близких дробей $p/q<r/s$ любую дробь m/n, где $p/q<m/n<r/s$, можно представить в виде $\dfrac{px+ry}{qx+sy}$, где x и y — натуральные числа.

г) Докажите свойства е* из пунктов 2 и 5 и выведите отсюда закономерности А и В рядов Фарея.

Заключение

Мы наметили несколько путей построения небольшой, но красивой теории рядов Фарея.

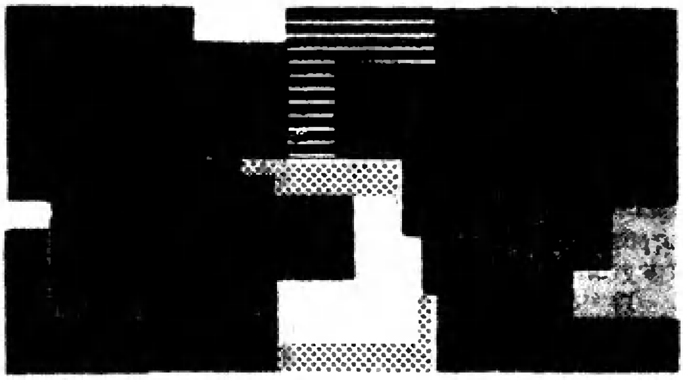
Эту теорию можно строить в самом начале изучения целых чисел, не опираясь на основную теорему арифметики (о единственности разложения на простые множители). Сама эта теорема может быть выведена из свойств рядов Фарея. Из этих свойств легко получить также решения в целых числах уравнения $ax-by=1$, где a и b взаимно просты: достаточно рассмотреть дробь $\frac{a}{b}$ и взять любую из соседних с ней дробей в ряду Фарея.

Ряды Фарея, а также изображение дробей на решетке полезны и в более тонких вопросах приближения вещественных чисел дробями с небольшими знаменателями.

Литература

1. Н. Б. Васильев. Решение задачи М233. «Квант», 1974, № 7, с. 39.
2. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М., «Наука», 1965.
3. К. Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. М., «Мир», 1974.
4. Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс. «О наилучших приближениях». «Квант», 1971, №№ 6 и 11.

И. М. Яглом



О задаче Радо

В «Кванте» № 5 за 1975 год в разделе «Задачник «Кванта» была опубликована задача М321 (автор А. В. Бравилов). Напомним ее условие.
Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую, что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь меньшую ε.
В этой заметке рассказывается о различных вариантах задачи о «системах неперекрывающихся салфеток». Некоторые из них имеют целую историю, другие — довольно просты и решаются с помощью одной идеи, как обычные «олимпиадные» задачи.

По-видимому, гипотетический (и имеющий отношение только к математике, а не к биологии) пример живых существ, для которых внешний мир — д в у м е р н а я плоскость, а не трехмерное пространство, принадлежит знаменитому немецкому естествоиспытателю и математику Г. Г е л ь м г о л ь ц у: это водомерки — «водяные пауки», скользящие движения которых по поверхности воды можно увидеть в любом застоявшемся водоеме. «Водомерки» Гельмгольца так же не в состоянии вообразить привычный нам «трехмерный» мир, как человек не может представить себе «четырехмерное пространство»*).

*) Воображаемым «живым существам», имеющим форму плоских геометрических фигур и населяющим двумерный мир, посвящена книга английского школьного учителя Э. Э. Э б б о т а «Флетленд», изданная еще в 80-х годах прошлого века и, к сожалению, ни разу не переводившаяся на русский язык. Сюжет повести Ч. Г. Х и н т о н а «Эпизод во Флетленде» (1907 г.), продолжающей ту же тему, кратко изложен в «Кванте», 1970, № 4, с. 28—31.

Мы начнем с еще более примитивного, чем у водомерок, внешнего мира: с одномерного аналога задачи М321. Даже в таком «облегченном» варианте она отнюдь не становится бессодержательной.

Покрытия отрезка

Сейчас у нас и «столы», и «салфетки» — не прямоугольники, а отрезки прямой. Нас интересует такое

У т в е р ж д е н и е. Пусть заданы отрезок o длины 1 («стол») и число $\varepsilon>0$. Тогда можно указать систему отрезков («салфеток»), покрывающих «стол» o, такую, что любая подсистема непересекающихся отрезков (неперекрывающихся «салфеток») имеет общую длину, меньшую ε*).

Верно это Утверждение или нет?

Испытаем сначала самые простые системы «салфеток».

На рисунке 1, а «стол» покрыт тремя «салфетками» длины $^1/_3$. Из них

*) Условимся для точности считать перекрывающимися любые две «салфетки», имеющие хотя бы одну общую точку.

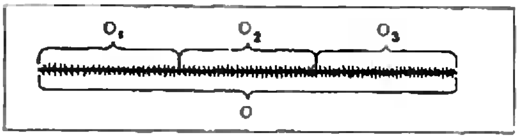


Рис. 1, а

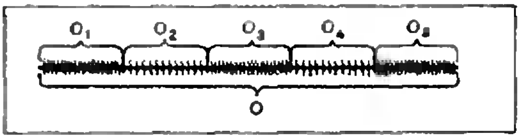


Рис. 1, б.

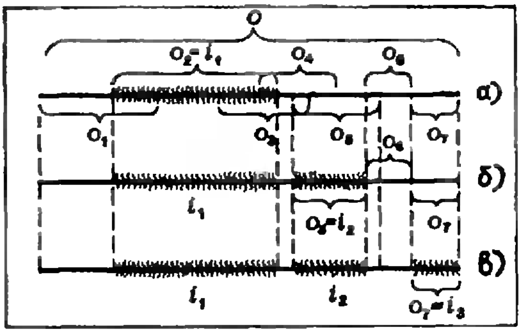


Рис. 2.

можно выбрать подсистему из двух неперекрывающихся «салфеток» с общей длиной $^2/_3$. (Можно, конечно, выбрать подсистему из одной «салфетки», но длина такой подсистемы меньше.) Итак, если $\varepsilon > {}^2/_3$, то наше утверждение верно: мы указали систему отрезков такую, что любая ее подсистема, состоящая из непересекающихся отрезков, имеет общую длину, не большую $^2/_3$, т. е. меньшую ε.

Упражнение 1. Докажите, что для $\varepsilon > {}^1/_2$ Утверждение тоже верно. (Постройте соответствующее покрытие отрезка-«стола» o меньшими отрезками-«салфетками».)

Ясно, что каждый пример системы отрезков K гарантирует справедливость нашего утверждения лишь при $\varepsilon > d_k$, где d_k — некоторое положительное число, зависящее от этой системы K. Так, для примера на рисунке 1,а $d_k = {}^2/_3$; на рисунке 1,б $d_k = {}^3/_5$. А вообще d_k — это наибольшая длина подсистемы $K' \subset K$, состоящей из непересекающихся отрезков. Ясно, что чем меньше ε, тем труднее строить пример. Может случиться так, что при ε, больших какого-то ε_0, наше Утверждение верно, а при меньших ε — уже нет. Докажем, что для одномерного варианта нашей задачи дело обстоит именно так.

При $\varepsilon = 1/3$ Утверждение неверно.

Другими словами, *никакая система «салфеток» не может послужить требуемым примером для $\varepsilon = {}^1/_3$, т. е. любая система «салфеток» содержит подсистему неперекрывающихся «салфеток», покрывающих часть «стола» o длины* $^1/_3$ (или больше $^1/_3$).

Пусть дана какая-то система отрезков K, покрывающих отрезок o длины 1. Выберем из K наибольший отрезок, обозначим его i_1. Выбросим теперь из системы K все отрезки покрытия, пересекающиеся с отобранным отрезком i_1 (они покрывают отрезок длины не больше $3|i_1|$, где $|i|$ — длина отрезка i). Из оставшихся отрезков покрытия снова выберем наибольший (обозначим его i_2) и выбросим все те отрезки, которые пересекаются с i_2 (они покрывают отрезок длины не больше $3|i_2|$), и так далее, пока не исчерпаем всех отрезков покрытия. Выбранная подсистема непересекающихся отрезков $i_1, i_2, \ldots$ такова, что

$$3|i_1| + 3|i_2| + \ldots \geqslant 1,$$

поскольку отрезки длины $3|i_1|$, $3|i_2|, \ldots$ в совокупности покрывают всю данную систему K и, стало быть, весь отрезок o длины 1. Поэтому сумма длин $|i_1| + |i_2| + \ldots$ не меньше $^1/_3$.

На рисунке 2 показан процесс выбора такой подсистемы $\{i_1, i_2, i_3\}$ для системы из семи отрезков.

Упражнение 2. а) Докажите, что из любой системы «салфеток», покрывающих «стол», можно выбрать подсистему «салфеток», которая тоже покрывает «стол», и такую, что никакая точка «стола» не покрыта более чем двумя «салфетками».

б) Докажите, что и при $\varepsilon \leqslant {}^1/_2$ Утверждение неверно.

Упражнение 3. Докажите, что если «стол» — по-прежнему отрезок длины 1, а «салфетки» могут быть и «дырявыми», т. е. каждая «салфетка» может состоять из одного или нескольких отрезков, то Утверждение, сформулированное в начале этого пункта, верно при всех $\varepsilon > 0$.

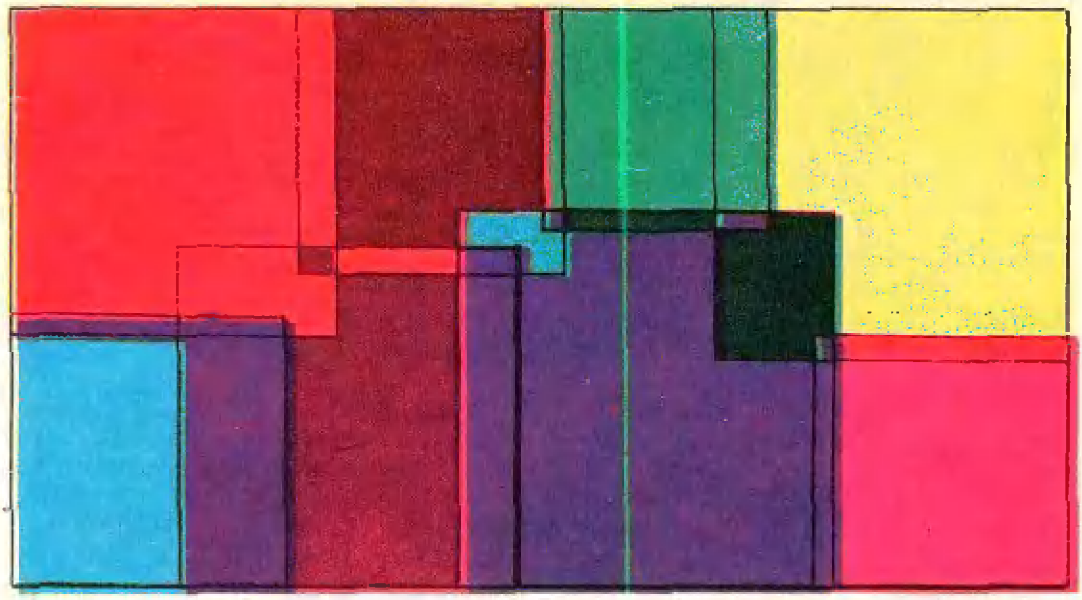


Рис. 3.

Решив упражнения 1 и 2, вы докажете следующий факт:

Теорема 1. *Пусть «стол» и «салфетки» — отрезки, длина «стола» равна 1.*

а) Из любой системы «салфеток», покрывающих «стол», можно выделить подсистему неперекрывающихся «салфеток» общей длины не меньше $^1/_2$.

б) Если $\varepsilon > ^1/_2$, *то всегда можно указать систему «салфеток» такую, что любая ее подсистема неперекрывающихся «салфеток» имеет длину меньше* ε.

Другими словами, *Утверждение верно при* $\varepsilon > ^1/_2$ *и неверно при* $\varepsilon \leqslant ^1/_2$.

Упражнение 4. Докажите аналогичную теорему для «стола» — окружности длины 1, и «салфеток» — дуг этой окружности.

Квадратные салфетки

В 1928 году известный венгерский математик Тибор Радо (T. Radò) сообщил в письме редактору ведущего польского математического журнала Fundamenta Mathematicae, главе польской математической школы Вацлаву Серпинскому, что не может решить, по-видимому, несложную геометрическую задачу, связанную с теорией функций нескольких переменных. Изложив известные нам соображения и результаты о покрытиях отрезка отрезками, Т. Радо ставит вопрос о получении аналогичных оценок для «двумерной» задачи, в которой «салфетки» — *квадраты* (разных размеров), а «стол» — скажем, *квадрат* (или *прямоугольник*) площади 1, причем края салфеток параллельны краям стола (рис. 3).

Итак, разница между задачей Радо и задачей М321 (Бранлова) только в форме «салфеток»: в М321 они могут быть любыми прямоугольниками, а у Радо — только квадратами. Но это «маленькое» различие, как нередко бывает, полностью меняет дело.

Метод, которым мы из системы отрезков, покрывающих отрезок длины 1, выделили подсистему длины не меньше $^1/_3$, работает и в двумерном случае. С его помощью Т. Радо доказал такой факт.

Теорема 2. *Из любого покрытия плоского «стола» площади 1 квадратными «салфетками» можно выбрать покрытие непере-*

крывающимися «салфетками», сумма площадей которых не меньше $^1/_9$.

Упражнение 5. а) Докажите теорему 2.

б) Придумайте пример, показывающий, что в формулировке теоремы 2 нельзя число $^1/_9$ заменить на число $^1/_4$.

Таким образом, в задаче Радо (в отличие от задачи Браилова) тоже существует какое-то критическое значение ε_0 такое, что

при $\varepsilon > \varepsilon_0$ верно

Утверждение 1. Можно указать пример системы «салфеток» такой, что любая подсистема неперекрывающихся «салфеток» имеет общую площадь меньше ε,

а для $\varepsilon < \varepsilon_0$ верно

Утверждение 2. Из любой системы «салфеток» можно выбрать подсистему из неперекрывающихся «салфеток» с общей площадью не меньше ε.

Разумеется, площадь «стола» мы все время считаем равной 1.

Т. Радо сумел доказать, что для критического значения ε_0 верны оценки

$$\frac{1}{9} \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{4}, \qquad (1)$$

но был уверен, что на самом-то деле $\varepsilon_0 = {}^1/_4$.

Доказать это равенство он и предлагал в письме Вацлаву Серпинскому.

Однако сделать это не удалось ни Серпинскому, ни другим математикам, хотя за задачу Радо принимались многие. И лишь 55 лет спустя, в 1973 году, стало ясно, почему. Оказывается, гипотеза Т. Радо просто неверна! В «Бюллетене польской Академии наук» появилась сенсационная заметка венгерского математика М. Айтаи (M. Ajtai), в которой довольно просто показывалось, что квадратами всего двух различных размеров можно так покрыть прямоугольник площади 1, что из них нельзя выбрать непересекающуюся подсистему площади $^1/_4$ или больше. Сейчас известно, что

$$\frac{1}{8{,}6} < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}; \qquad (2)$$

левое неравенство явилось результатом последовательных уточнений неравенства (1) Т. Радо, последнее из которых принадлежит ленинградскому геометру В. А. Залгаллеру*) (по-видимому, оно также не является окончательным, будучи гораздо ближе к «грубому» результату теоремы 2, чем к гипотетической оценке Т. Радо).

Наиболее красиво и просто решается частный случай задачи Радо, — когда все «салфетки» — квадраты одного размера. В этом случае критическое значение ε_0 оказывается действительно равным $^1/_4$. Этот результат доказал еще в 1940 году молодой ленинградский математик А. С. Соколин (и позже, независимо от него, многие другие, причем несколькими различными путями).

Теорема Блихфельда и результат Соколина

Докажем сначала такую приятную теорему, одному из вариантов которой была посвящена вторая страница обложки «Кванта», 1973, № 10.

Теорема Блихфельда. *Если площадь фигуры, расположенной на листе клетчатой бумаги, больше $n-1$ (где n — целое; сторона клетки принимается за 1), то эту фигуру можно параллельным переносом сдвинуть в такое положение, что она покроет по крайней мере n узлов сетки. (Узлами называют точки, где пересекаются линии, разбивающие плоскость на квадратные клетки.)*

Доказательство. Разрежем лист клетчатой бумаги на отдельные клетки и соберем вместе, в стопку, все те клетки, на которых помещается хотя бы часть фигуры (от рисунка 4, а перейдем к рисунку 4, б). Поскольку сумма площадей кусков нашей фигуры больше $n-1$, то некоторые точки в стопке будут покрыты по крайней мере n кусками

*) В. А. Залгаллер, Замечания о задаче Радо, сборник «Математическое просвещение» (новая серия), вып. 5, М., Физматгиз, 1960, с. 141—148.

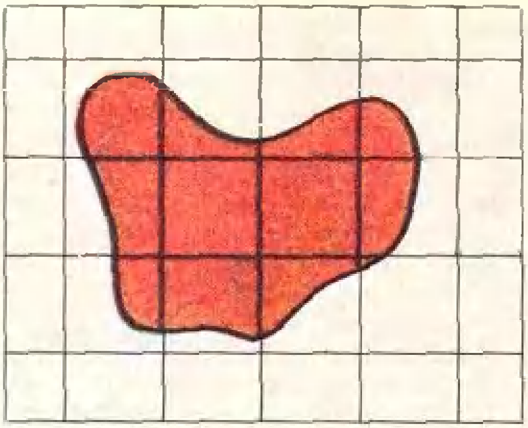


Рис. 4, а.

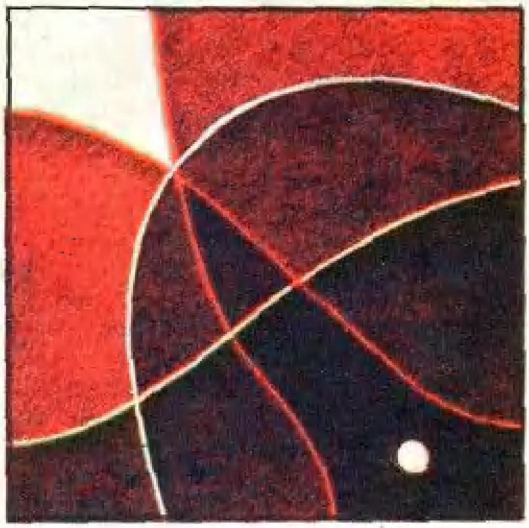


Рис. 4, б.

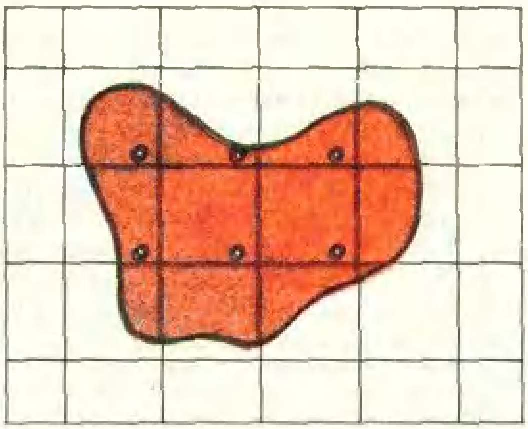


Рис. 4, в.

фигуры. Проткнем иглой одну из этих точек; на каждом куске останется след от прокола. Если мы теперь расположим клетки, собранные в стопку, на плоскости в прежнем порядке (разумеется, мы считаем, что клетки совмещались параллельным переносом), то проколы будут располагаться «правильным образом» — в вершинах новой сетки квадратов со стороной 1 (рис. 4, в). Остается параллельно перенести фигуру так, чтобы эти проколы совместились с узлами (рис. 4, г).

Упражнение 6. Докажите, что если площадь фигуры меньше $n+1$, то ее можно перенести так, чтобы она задевала не больше n узлов сетки (n — целое число).

С помощью теоремы Блихфельда получается нужный нам результат.

Теорема 3. *Если система конгруэнтных квадратов с взаимно параллельными сторонами покрывает фигуру площади S, то из нее можно выбрать подсистему непересекающихся (не имеющих общих внутренних точек) между собой квадратов, сумма площадей которых не меньше $S/4$.*

Какую именно фигуру покрывают квадраты, здесь, как, впрочем, и в задаче Радо, не имеет значения. Важна только ее площадь.

Доказательство. Мы нарочно сформулировали теорему несколько иначе, чем предыдущие (площадь «стола» теперь S, а не 1), чтобы иметь возможность выбрать другую единицу длины. Будем считать, что длина стороны каждой «салфетки» равна $^1/_2$. По теореме Блихфельда можно расположить нашу фигуру (площади S) на клетчатой бумаге (со стороной клетки 1) так, чтобы она покрывала $n \geqslant S$ узлов сетки. Оставим по одной «салфетке», покрывающей каждый из этих n узлов. Ясно, что выбранные «салфетки», не могут налегать друг на друга, а их общая площадь равна

$$\frac{1}{4}n \geqslant \frac{S}{4}.$$

Теорема Соколина доказана.

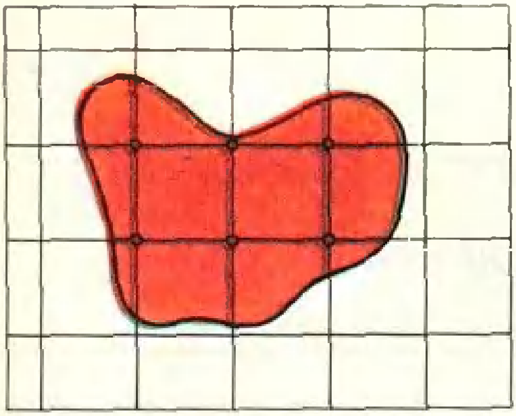


Рис. 4, г.

Варианты задачи Радо

Больше всего усилий на задачу Т. Радо затратил другой известный венгерский математик — Р. Радо. В 1950, 1951, 1968 гг. он опубликовал в английских журналах три обширные статьи: «Несколько теорем о покрытиях», I—III, целиком навеянные задачей Т. Радо (так что у нас было основание назвать статью «О задаче Радо», не указывая инициала). Перечислим только некоторые результаты и нерешенные вопросы, связанные с этой задачей.

Для задачи о треугольном «столе» Т и п о д о б н ы х ему (с соответственно параллельными сторонами) треугольных «салфетках» удалось получить некоторые оценки для ε_0; в частности, для покрытия Т к о н г р у э н т н ы м и (и параллельно расположенными) треугольниками (аналог результата Соколина) можно указать критическое значение ε_0 т о ч н о: $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$. (Разумеется, в этой задаче всегда можно говорить о «столе», имеющем форму правильного треугольника.)

Получены также некоторые оценки для к р у г л ы х «салфеток» (одинаковых и разных размеров), и для других типов п о д о б н ы х д р у г д р у г у «салфеток».

У п р а ж н е н и е 7. Докажите, что если все «салфетки» подобны данной фигуре Ф (которую они покрывают), то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что из любого покрытия «стола» площади 1 можно выделить подсистему неперекрывающихся «салфеток» с общей площадью не меньше ε_0 (ε_0, конечно, зависит от формы Ф).

Таким образом, здесь критическое значение ε_0 всегда п о л о ж и т е л ь н о, — в отличие от задачи Браилова, в которой $\varepsilon_0 = 0$ (там «салфетки» — прямоугольники, не обязательно п о д о б н ы е друг другу!).

Рассматривались и другие обобщения задачи Радо, например: какую наибольшую суммарную площадь может иметь общая площадь двух подсистем, в каждой из которых «салфетки» не налегают друг на друга; каковы оценки для пространственных аналогов задачи Радо — но во всех этих направлениях получены лишь частичные результаты и довольно грубые оценки.

У п р а ж н е н и е 8. а) Докажите для пространственного аналога задачи Радо (о покрытии куба кубами) неравенства

$$\frac{1}{27} < \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{8}. \tag{3}$$

б) Сформулируйте и докажите для этого случая аналог теоремы 3.

Ряд задач, близких к задаче Радо (в том числе и предложенных выше в качестве упражнений), вместе с их решениями, вы можете найти в последних выпусках серии «Библиотека математического кружка» и «Библиотечка физико-математической школы»: О. Д. Ш к л я р с к и й и др., «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии», М., «Наука», 1974, цикл задач 3;

Н. Б. В а с и л ь е в и др., «Математические соревнования; геометрия», М., «Наука», 1974, задачи 7.6—7.9.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

А. Г. Резников

Две последовательности треугольников

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Через $A_1B_1C_1$ обозначим треугольник, вершинами которого являются точки касания вписанной в ABC окружности с его сторонами (рис. 1). Аналогично, для треугольника $A_1B_1C_1$ определим треугольник $A_2B_2C_2$ и т. д. Таким образом, получим последовательность вписанных друг в друга треугольников

$$ABC,\ A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2,\ \ldots \quad (1)$$

Другую последовательность треугольников определим следующим образом: через $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ обозначим треугольник, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис треугольника ABC с описанной окружностью. Аналогично для треугольника $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ определим треугольник $A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)}$ и т. д. Таким образом, получим последовательность треугольников

$$ABC,\ A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)},\ A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)},\ldots (2)$$

В этой заметке мы изучим некоторые свойства последовательностей (1) и (2). Многие наши утверждения мы

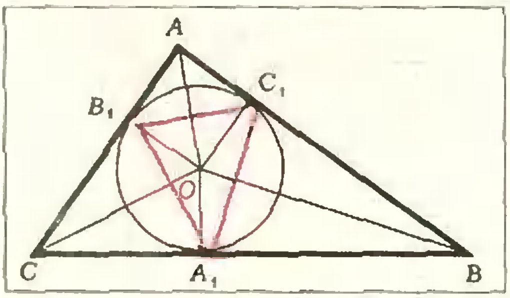


Рис. 1.

не доказываем. Надеемся, что вы сделаете это самостоятельно.

1. Легко выразить углы треугольника $A_1B_1C_1$ через углы исходного треугольника. Например, $\hat{A}_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}$. Аналогично, $\hat{A}_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}_1$ и вообще $\hat{A}_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}_{n-1}$.

Иными словами, последовательность углов A, A_1, A_2, ..., A_n, ..., образует арифметико-геометрическую прогрессию. О таких прогрессиях рассказано в статье Я. Н. Суконника в «Кванте» № 1 за этот год. Используя результат этой статьи, получим следующее выражение:

$$\hat{A}_n = 60^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\hat{A} - 60^\circ). \quad (3)$$

Углы треугольника $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ равны соответствующим углам треугольника $A_1B_1C_1$ (проверьте!). Значит, последовательности (1) и (2) — последовательности подобных треугольников.

Из формулы (3) следует, что если $A \neq 60^\circ$, то и все $\hat{A}_n \neq 60^\circ$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}_n = 60^\circ$. Аналогично $\lim \hat{B}_n = 60^\circ$, $\lim \hat{C}_n = 60^\circ$ и то же самое верно для углов $\hat{A}^{(n)}$, $\hat{B}^{(n)}$, $\hat{C}^{(n)}$.

2. Пусть p_n, S_n R_n, r_n соответственно полупериметр, площадь, радиусы описанной и вписанной окружностей для треугольника $A_nB_nC_n$. Аналогично определяются величины $p^{(n)}$, $S^{(n)}$, $R^{(n)}$, $r^{(n)}$ для треугольника

$A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ и p_0, S_0, R_0, r_0 для исходного треугольника ABC. Очевидно, что $R^{(n)}=R_0$, $R_n=r_{n-1}$.

Докажем, что

$$S_n=\frac{1}{2}\frac{R_n}{R_{n-1}}S_{n-1}. \qquad (4)$$

Достаточно доказать, что

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{r_0}{R_0}S_0. \qquad (4')$$

Доказательство. Легко видеть (см. рис. 1), что

$$S_{A_1OB_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\widehat{B_1OA_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{C},$$

$$S_{B_1OC_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{A},$$

$$S_{C_1OA_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{B}.$$

Поэтому $S_1=\frac{1}{2}r_0^2(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})$. Но по теореме синусов $AB=2R_0\sin\hat{C}$, $BC=2R_0\sin\hat{A}$, $CA=2R_0\sin\hat{B}$. Следовательно, $\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=p_0/R_0$. Таким образом,

$$S_1=\frac{1}{2}r_0^2\cdot\frac{p_0}{R_0}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{r_0}{R_0}r_0p_0=\frac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}S_0.$$

3. Докажем, что последовательность $S_0, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$ является возрастающей.

Так как

$$S_0=2R_0^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C},$$

$$S^{(1)}=2R_0^2\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\ ^{*}),$$

то неравенство $S^{(1)}\geqslant S_0$ эквивалентно неравенству

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \qquad (5)$$

Докажем неравенство (5). Используя то, что

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}),$$

преобразуем (5) так:

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}-\cos(\hat{A}+\hat{B})\leqslant\frac{3}{2}$$

или

$$2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}-2\cos^2\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant 0,$$

$$-2\left(\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)\leqslant 0. \qquad (5')$$

Последнее неравенство очевидно. Из (5′) следует, что равенство в (5) имеет место только в том случае, когда все углы треугольника равны 60°. Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ подобны и коэффициент подобия равен $\frac{R_0}{r_0}$, то

$$S^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{R_0}{r_0}S_0 \qquad (6)$$

(см. формулу 4′). Но поскольку $S^{(1)}\geqslant S_0$, отсюда следует известное неравенство $R_0\geqslant 2r_0$.

Из того, что последовательность $S_0, S^{(1)}, S^{(2)}\ldots$ является возрастающей и ограниченной, следует, что она имеет предел. Как было показано, углы треугольников $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ стремятся к 60°. Следовательно, пределом последовательности $S^{(n)}$ является площадь правильного треугольника, вписанного в окружность с радиусом R_0, а площадь произвольного треугольника, вписанного в данную окружность, не превосходит площади этого правильного треугольника.

4. Можно доказать, что для последовательности полупериметров $p_0, p_1, p_2, \ldots$ справедливо неравенство

$$p_n\leqslant\frac{1}{2}p_{n-1}. \qquad (7)$$

Как и раньше, достаточно доказать (7) при $n=1$:

$$p_1\leqslant\frac{1}{2}p_0. \qquad (7')$$

*) Докажите эти равенства самостоятельно.

Один из возможных путей доказательства неравенства (7′) состоит в следующем: сначала нужно доказать, что

$$p_1 \leqslant \frac{3}{2} r_0 \sqrt{3}, \qquad (8)$$

т. е., что среди всех треугольников, *вписанных* в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

Затем — неравенство

$$p_0 \geqslant 3 r_0 \sqrt{3}. \qquad (9)$$

Это означает, что из всех треугольников, *описанных* около данной окружности, наименьший периметр имеет правильный.

Неравенство (7′) следует из (8) и (9). Постарайтесь доказать их самостоятельно.

Упражнения

1. Для каких треугольников ABC при некотором n:

а) $\triangle A_nB_nC_n \sim \triangle ABC$?

б) $\triangle A_nB_nC_n$ равнобедренный?

2. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ гомотетичны.

3. Докажите, что

$$|A_1B_1|\cdot|B_1C_1|\cdot|C_1A_1| \leqslant \frac{1}{8}|AB|\cdot|BC|\cdot|CA|.$$

4. Как было сказано, $p_1/p_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Оцените p_1/p_0 снизу: найдите такое число c, что $p_1/p_0 \geqslant c$.

5. Докажите, что

$$\frac{|A_1B_1|^2+|B_1C_1|^2+|C_1A_1|^2}{|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

6. Докажите, что наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит половины наибольшей стороны треугольника ABC. Можно ли то же самое сказать про наименьшие стороны этих треугольников? Про средние по величине стороны этих треугольников?

Задачи наших читателей

1. Дан треугольник ABC. Внутри треугольника взята точка M и соединена с вершинами A и C; K и L — точки пересечения соответственно MC с AB и AM с BC.

Найти множество точек M, таких, что $S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CML}$.

Р. Л. Мкртчян

2. Решить уравнение $n! = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

П. В. Парамонов

3. Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 8\cdot9\cdot10 = 720$. Есть ли еще такие числа?

В. А. Панарин

4. Найти все группы из 10 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

Е. Мазур

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) через точку A и середину M высоты BH проведена прямая, пересекающая BC в точке N. Во сколько раз отрезок MN меньше отрезка AM?

В. Ф. Акулич, И. Ф. Акулич

6. В игру «морской бой» обычно играют на клетчатом поле размером 10×10. «Линкором» в этой игре называют «корабль», занимающий часть игрового поля размером 1×4.

Найти минимальное количество выстрелов, которое необходимо произвести по игровому полю, чтобы произвольно расположенный на игровом поле «линкор» был поражен хотя бы одним выстрелом.

В. Г. Чванов

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М336, М337» или «...Ф348». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений.

Задачи

М 336 — М340; Ф348—Ф352

М336. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников. (10 кл.)

С. В. Фомин

М337. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной длины 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — точку Y на стороне BC, затем первый — точку Z на стороне AC.

а) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго — наименьшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

б) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наименьшего периметра, второго — наибольшего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый? (8—9 кл.)

М. Д. Бронштейн

М338. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стертых (2 вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2). Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания. (8 и 10 кл.)

С. В. Фомин

М339. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих n прямых пересекаются внутри полосы и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым, и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей

а) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;

б) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

в) есть путь, проходящий по всем n прямым. (8—9 кл.)

А. В. Карзанов

М340*. В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Некоторая клетка таблицы называется ее *седловой* клеткой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел в своем столбце и не больше остальных чисел в своей строке.

а) Пусть про таблицу T известно, что любая таблица 2×2, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы T, имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица T также имеет седловую клетку.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — положительные числа. Докажите, что таблица $m\times n$, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой стоит число $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, имеет седловую клетку.

Одно из решений задачи б) можно получить, используя а). Подумайте, однако, как можно решить эту задачу другим способом. (10 кл.)

В. П. Гринберг

Ф348. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту (т. е. круговую орбиту, очень близкую к поверхности Луны), в момент наибольшего сближения с Луной включается тормозной двигатель. Определить, насколько изменится скорость корабля при выполнении этого маневра. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л \approx 1{,}7$ *м/с*^{2}, радиус Луны $R_Л \approx 1{,}7\cdot10^6$ *м*.

Дополнительный вопрос. Попробуйте оценить, какую часть первоначальной массы корабля должно составить сожженное горючее, если двигатель выбрасывает продукты сгорания с относительной скоростью $v=4\cdot10^3$ *м/с*. (10 кл.)

Ф349. Один киломоль идеального одноатомного газа, находящегося при нормальных условиях, переводят из состояния 1 в состояние 2 двумя способами: 1→3→2 и 1→4→2 (см. рис. 1). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить газу в этих двух процессах. (9 кл.)

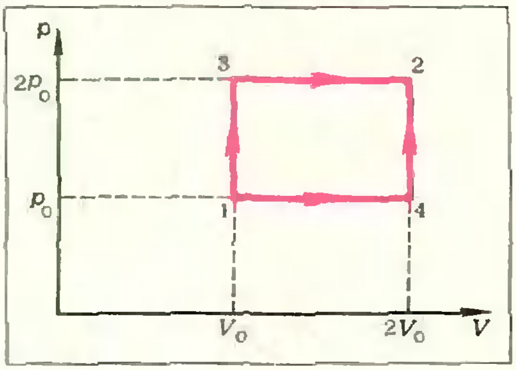


Рис. 1.

Ф350. Найти зависимость падения напряжения на сопротивлении R в схеме, показанной на рисунке 2, от величины этого сопротивления. Э. д. с. всех источников равны $\mathscr{E}$, их внутренние сопротивления r. Диод считать идеальным (его сопротивление в прямом направлении равно нулю, а в обратном — бесконечно велико). (9—10 кл.)

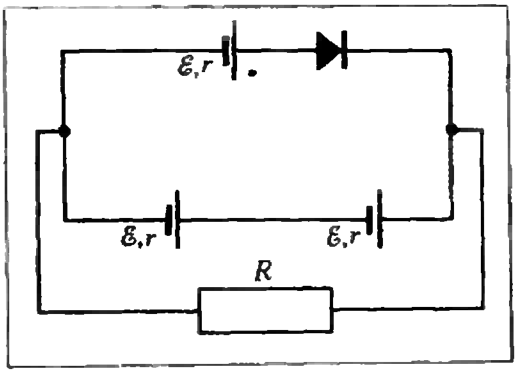


Рис. 2. кон.

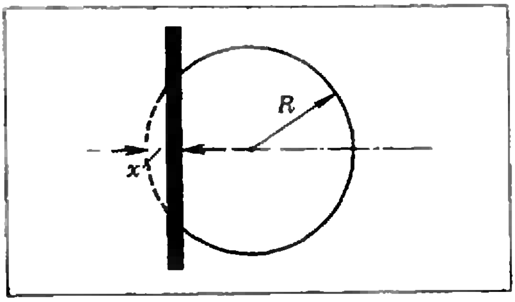


Рис. 3.

Ф351. При слабом ударе футбольного мяча о стенку он деформируется, как показано на рисунке 3. При этом деформация x мяча много меньше его радиуса, и можно с хорошим приближением считать, что давление p воздуха в мяче в процессе удара не меняется.

Пренебрегая упругостью покрышки, оценить время соударения мяча со стенкой. Провести числовой расчет для случая, когда масса мяча $m=0{,}5$ *кг*, давление в нем $p=2$ *атм* и радиус $R=12{,}5$ *см*. (10 кл.)

Ф352. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, показанная на рисунке 4. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Напряжение $U_{вх}$ на входе цепи увеличивается вдвое. Как изменить положение движка реостата для того, чтобы напряжение на нагрузке осталось прежним? (8 кл.)

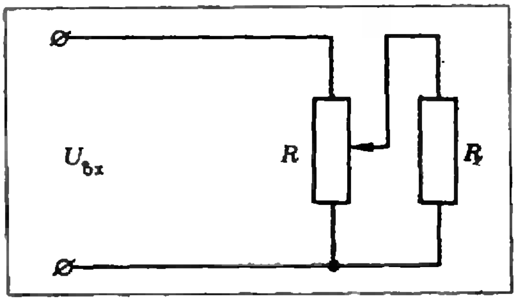


Рис. 4.

Решения задач

М301—М303

М301. *На плоскости заданы $2n$ точек — n синих и n красных, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.*

Назовем *системой* всякие n отрезков, таких, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не выходят из одной точки. Чтобы построить систему, надо как-нибудь разбить наши $2n$ точек на n пар — по одной красной и одной синей в каждой паре — и соединить точки каждой пары отрезком.

Надо найти систему, отрезки которой не имеют друг с другом общих точек. Докажем, что годится система, для которой сумма длин ее отрезков — минимальная из всех возможных (для данных $2n$ точек). Действительно, пусть у нас есть такая система с минимальной суммой длин отрез-

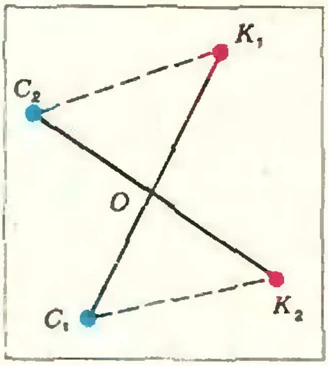


Рис. 1.

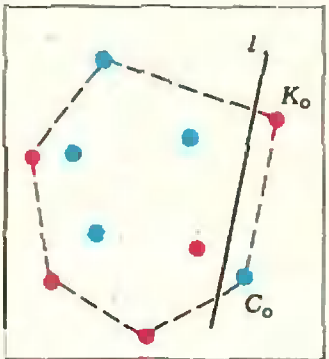


Рис. 2.

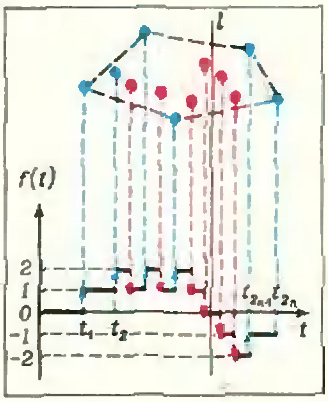


Рис. 3.

ков. Докажем, что все ее отрезки не имеют общих точек. Допустим противное: пусть два ее отрезка K_1C_1 и K_2C_2 имеют общую точку O (K_1, K_2 — красные, C_1, C_2 — синие точки, рис. 1). Докажем, что тогда сумма длин отрезков этой системы может быть уменьшена.

По условию никакие три из точек K_1, K_2, C_1, C_2 не лежат на одной прямой. Тогда точки K_1, K_2, C_1, C_2 — вершины выпуклого четырехугольника. Разумеется, сумма длин *любых двух его противоположных сторон меньше суммы длин диагоналей*, например, $|K_1C_2|+|K_2C_1|<|K_1C_1|+|K_2C_2|$ (см. рис. 1). Заменив в нашей системе отрезки K_1C_1 и K_2C_2 отрезками K_1C_2 и K_2C_1, мы уменьшим сумму длин всех отрезков, что противоречит предположению.

Приведем другое решение задачи, предложенное ее автором *С. Охитиным* (Оренбург), а также несколькими читателями.

Докажем сначала такую л е м м у:

для любого множества n синих и n красных точек, о котором говорится в условии, *можно провести прямую l так, что в каждой из полуплоскостей, на которые l разбивает плоскость, лежит поровну синих и красных точек*, причем не все $2n$ точек лежат в одной полуплоскости и никакая из них не принадлежит l.

Рассмотрим *выпуклую оболочку* множества из наших $2n$ точек: наименьший содержащий их выпуклый многоугольник. Несколько из этих $2n$ точек служат его вершинами. Разберем два случая.

а) Среди вершин есть и красные, и синие точки. В этом случае найдутся две соседние вершины разных цветов: K_0 и C_0. Проведем прямую l параллельно отрезку K_0C_0 так, чтобы все остальные $2n-2$ точки лежали по другую сторону от l. Это и есть нужная прямая (рис. 2).

б) Все вершины — одного цвета, скажем, синего. Выберем какое-то направление так, чтобы никакая прямая этого *направления не проходила через две точки нашего множества*. Можно считать, что это направление — вертикальное (рис. 3). Будем двигать равномерно вертикальную прямую (слева направо) и отметим те моменты времени $t_1, \ldots, t_{2n}$, когда она будет проходить точки нашего множества. Обозначим через $f(t)$ разность между количеством синих и красных точек в левой полуплоскости нашей прямой в момент времени t. На каждом отрезке, на которые точки $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ разбивают ось $-\infty<t<+\infty$, функция $t\to f(t)$ постоянна, в частности, $f(t)=1$ при $t_1<t<t_2$ (слева от прямой — одна синяя точка и 0 красных), $f(t)=-1$ при $t_{2n-1}<t<t_{2n}$, и при каждом переходе через t_i значение $f(t)$ меняется на е д и н и ц у. Ясно, что на каком-то отрезке $]t_k, t_{k+1}[$ значение $f(t)$ должно равняться 0.

Любую вертикальную прямую, соответствующую моменту времени t между t_k и t_{k+1}, можно взять в качестве l. Лемма доказана.

Теперь утверждение задачи легко доказать индукцией по n. Для $n=1$ (даны две точки — синяя и красная) оно очевидно. Предположим, что для всех множеств из $2k$ точек (k *синих и* k *красных*), где $k<n$, утверждение справедливо. Тогда оно справедливо и для множеств из $2n$ точек: пользуясь леммой, мы можем разбить такое множество на два, к каждому из которых применимо предположение индукции. Отрезки, лежащие в одной и другой полуплоскости, разумеется, не будут пересекаться.

А. Л. Тоом, Н. Б. Васильев

М302. *Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ $((AB)\|(CD))$, A' и B' — точки, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите, что $\angle ACA' \cong \angle BDB'$ (рис. 4).*

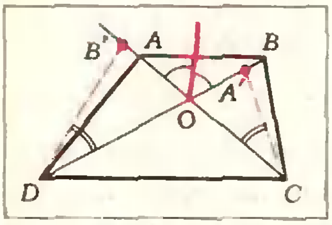


Рис. 4.

М303. *Прямоугольник $300\times$ $\times 1000$ разрезан на квадраты 1×1, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут.*

Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OC|}$. Обозначим это отношение через k. Пусть F — композиция двух преобразований: симметрии относительно биссектрисы угла AOB и гомотетии (подобного преобразования) с центром O и коэффициентом k. Нетрудно видеть, что

$$F(A) = B,\ F(C) = D,\ F(A') = B',$$

т. е.

$$F(\triangle ACA') = \triangle BDB',$$

поэтому $\angle ACA' \cong \angle BDB'$.

План другого решения: поскольку $|OB|\cdot|OC| = |OA|\cdot|OD|$, то

$$|OB'|\cdot|OC| = |OA'|\cdot|OD|,$$

и точки C, D, B' и A' лежат на одной окружности.

◆

Введем систему координат Oxy так, чтобы вершины прямоугольника получили координаты $(0, 0)$, $(0; 300)$, $(1000; 300)$, $(1000; 0)$. Если какие-то 10 гирек находятся в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{10}, y_{10}), то координаты их центра тяжести $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}$, $\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{10}}{10}$. Таким образом, координаты центра тяжести любых 10 гирек, расположенных в «целых точках» прямоугольника — в вершинах квадратов построенной сетки,— обязательно имеют вид $(k/10, l/10)$, где k и l — целые числа, причем $0 \leqslant k \leqslant 10\,000$ и $0 \leqslant l \leqslant 3000$. Точек такого вида существует всего

$$10\,001\cdot 3\,001 = 30\,013\,001. \qquad (1)$$

С другой стороны, 10 гирек из данных 30 можно выбрать

$$C_{30}^{10} = \frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} =$$

$$= 29\cdot23\cdot\underbrace{13\cdot11\cdot7}_{1\,001}\cdot5\cdot3^2 = 30\,015\cdot1\,001 = 30\,045\,015 \qquad (2)$$

способами *). Поскольку (1) меньше (2), центры тяжести каких-то двух различных групп по 10 гирек должны попасть в одну точку.

Задача была бы уже решена, если бы в условии не требовалось, чтобы группы гирек были н е п е р е с е к а ю щ и м и с я.

Но и это требование нетрудно выполнить. Если две группы по 10 гирек с общим центром тяжести C пересекаются,— скажем, их пересечение состоит из k гирек,— то, выбросив эти общие k гирек из той и другой группы, мы получим две непересекающиеся группы по $(10-k)$ гирек. Ясно, что центр тяжести C группы из 10 гирек расположен на отрезке, соединяющем центры тяжести C', C'' составляющих ее групп из k и $(10-k)$ гирек, и делит этот отрезок в отношении $(10-k)/k$. Поскольку центры тяжести для той и другой группы по 10 гирек совпадают, то центры тяжести обеих групп по $(10-k)$ гирек также совпадут.

Н. Б. Васильев

*) См. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте», 1971, № 1, или учебник для 9-го класса Б. Е. Вейца и И. Т. Демидова, гл. 1.

Н. М. Быстрый

Конструирование уравнений по графикам функций

Необходимость конструирования уравнений функций возникает при решении различных вопросов. Встречаются такие задачи и в математике, и в физике, и что особенно важно, в современной технике. В этой статье показано, как с помощью уравнений элементарных функций (уравнений прямой, параболы, синусоиды) можно описать графики более сложных зависимостей, встречающихся в школьном курсе физики. Точнее, в тех его разделах, где рассказывается о периодических процессах.

Вспомним сначала несколько важных свойств графиков функций.

1. Если график функции $F_1(x)$ есть сдвинутый на $|c|$ единиц вверх или вниз вдоль оси ординат график функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, то уравнение функции $F_1(x)$ имеет вид

$$F_1(x)=f(x)\pm|c|,\quad x\in[a,b],$$

причем, если график сдвинут вверх, следует брать знак «+», а если вниз — знак «—».

2. Если график функции $F_2(x)$ есть сдвинутый на $|c|$ единиц влево или вправо вдоль оси абсцисс график функции $f(x)$, $x\in[a, b]$, то уравнение функции $F_2(x)$ имеет вид

$$F_2(x)=f(x\pm|c|),\quad x\in[a\mp|c|,\ b\mp|c|],$$

причем верхние знаки берутся в случае, когда график сдвинут влево, а нижние — когда сдвинут вправо.

3. Если график функции $F(x)$ симметричен относительно оси абсцисс графику функции $f(x)$, $x\in[a, b]$, то уравнение $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=-f(x),\quad x\in[a,\ b].$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры.

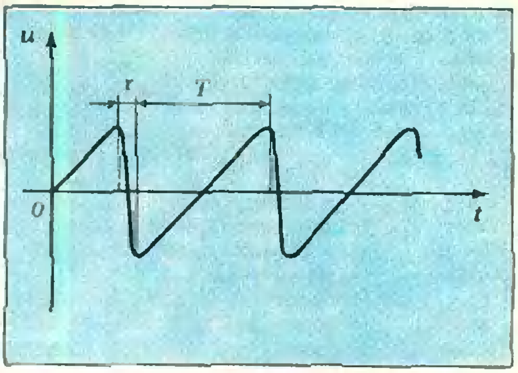


Рис. 1.

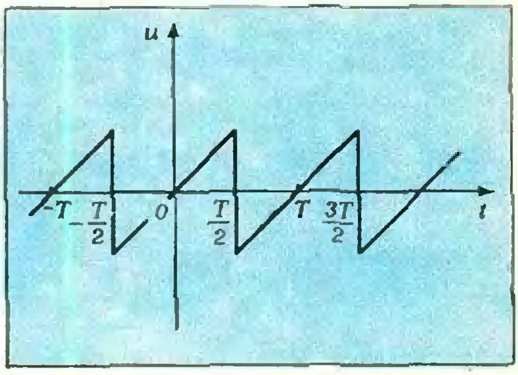


Рис. 2

«Пилообразное» напряжение

Попробуем, пользуясь приведенными выше свойствами графиков функций, описать «пилообразное» напряжение (рис. 1). Напряжение такого вида подается, например, на отклоняющие пластины электроннолучевой трубки осциллографа. Для «пилообразного» напряжения характерно, что время T его нарастания велико по сравнению со временем спада τ. Поэтому графически изменение напряжения во времени можно представить в виде линии, изображенной на рисунке 2. Однако в этом случае возникает неоднозначность в точках

$$t=\frac{T}{2}(2n+1),$$

n — целое число. Чтобы избавиться от неоднозначности, заменим «пилообразную» линию графиком функции, вообще не определенной в точках

$$t=\frac{T}{2}(2n+1),$$

или графиком функции, определенной в этих точках слева или справа (рис. 3, *а*, *б*, *в*).

Для получения уравнения периодической функции $u(t)$, изображенной на рисунке 3, *а*, исследуем ее при изменении аргумента в пределах одного периода, например, $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

В этом интервале график периодической функции $u(t)$ совпадает с графиком функции $u_0=f(t)=t$ *). Сдвинем теперь график u_0 вдоль оси абсцисс на один период вправо (красная линия на рисунке). Тогда получим новую функцию $u_1=f(t-T)=t-T$, причем промежуток $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ перейдет в промежуток $\left(\frac{T}{2}, \frac{3}{2}T\right)$. Смещая график функции u_0 вдоль оси абсцисс на целое число n периодов, всякий

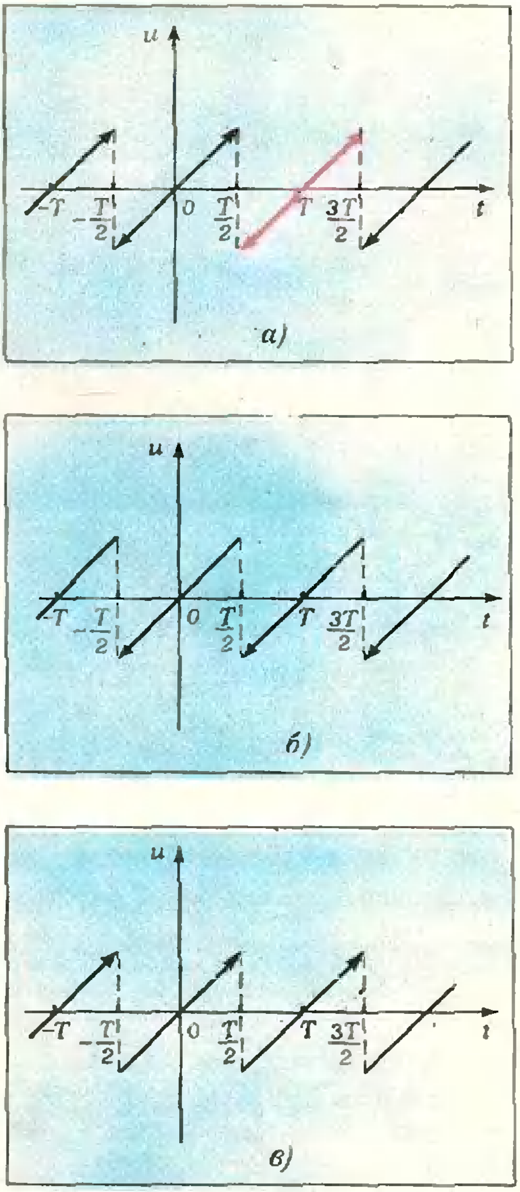


Рис. 3.

раз при фиксированном n будем получать новую функцию

$$u_n=f(t-nT)=t-nT, \qquad (1)$$

$$t\in\left(\frac{T}{2}(2n-1), \frac{T}{2}(2n+1)\right).$$

Совокупность этих функций при $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ составляет уравнение искомой функции $u(t)$.

Если период функции $T=\pi$ секунд, то ее уравнение можно записать поиному:

*) Точнее, $f(t)=At$, где $A=1$ в/с — размерный коэффициент.

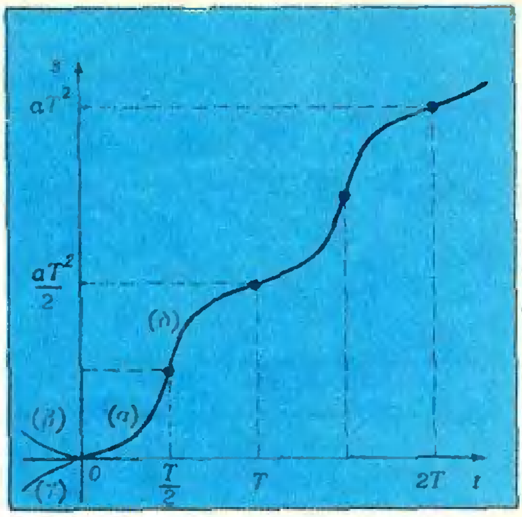


Рис. 4.

$$u(t) = t - n\pi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t),$$
$$t \in \left(\frac{\pi}{2}(2n-1), \frac{\pi}{2}(2n+1)\right),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Рассмотрим теперь графики, изображенные на рисунках 3, *б*, *в*. Первый из них — график функции, определенной в точках $\frac{T}{2}(2n+1)$ слева, уравнение которой имеет вид

$$u(t) = t - nT,$$
$$t \in \left(\frac{T}{2}(2n-1), \frac{T}{2}(2n+1)\right].$$

Уравнение функции, которой соответствует график 3, *в* (функция определена в точках $\frac{T}{2}(2n+1)$ справа), записывается в виде

$$u(t) = t - nT,$$
$$t \in \left[\frac{T}{2}(2n-1), \frac{T}{2}(2n+1)\right).$$

В обоих случаях $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Наконец, приведем уравнение всей «пилообразной» линии (см. рис. 2). Она, как нетрудно заметить, состоит из двух совокупностей функций. Первая — это отрезки прямых, описываемые уравнениями (1), а вторая — отрезки прямых, параллельные оси ординат. Их уравнения:

$$t(u) = \frac{T}{2}(2n+1),$$
$$u \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Уравнение пути

На рисунке 4 приведен график пути, проходимого точкой, движущейся прямолинейно.

Сконструируем уравнение пути *). Очевидно, что график $S(t)$ составлен из участков параболы $S_\alpha = at^2$, $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ **). Проделаем следующие преобразования:

1) ветвь (α) отразим симметрично относительно оси ординат — получим ветвь (β): $S_\beta = at^2$, $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right]$;

2) ветвь (β) отразим симметрично относительно оси абсцисс — получим ветвь (γ): $S_\gamma = at^2$, $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right]$;

3) переместим ветвь (γ) на T вправо и на $\frac{aT^2}{2}$ вверх — получим ветвь (δ):

$$S_\delta = -a(t-T)^2 + \frac{aT^2}{2}, \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right].$$

Перемещая ветви (α) и (δ) на nT вправо и на $n\frac{aT^2}{2}$ вверх, при переменном $n = 0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$S(t) = \begin{cases} a(t-nT)^2 + n\frac{aT^2}{2}, \\ t \in [nT, \frac{T}{2} + nT]; \\ -a[t-(n+1)T]^2 + \\ + (n+1)\frac{aT^2}{2}, \\ t \in [\frac{T}{2} + nT, \ (n+1)T]. \end{cases} \qquad (2)$$

---

*) См. «Квант», 1973, № 11, с. 60.

**) Здесь a — коэффициент пропорциональности. Если точка движется с ускорением b, то $a = b/2$

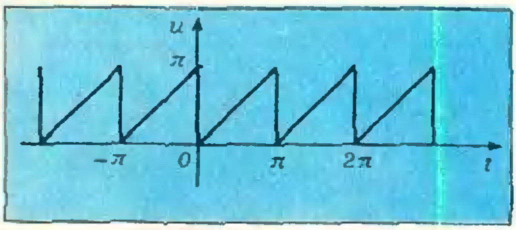


Рис. 5.

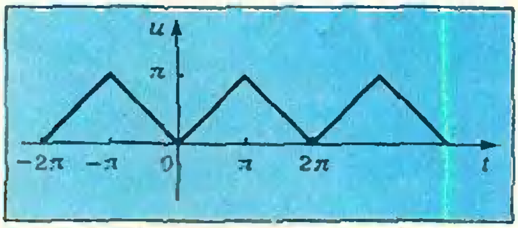


Рис. 6.

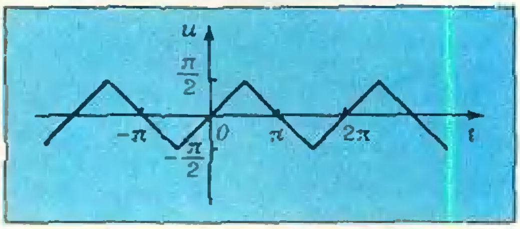


Рис. 7.

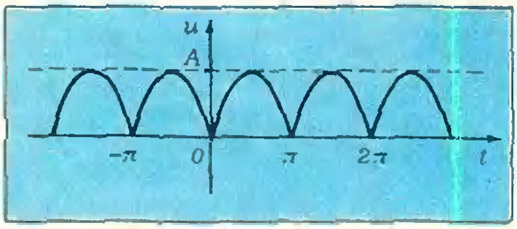


Рис. 8.

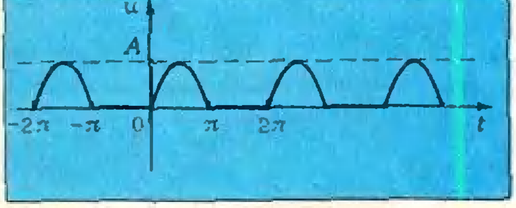


Рис. 9.

Если преобразовать вторую часть так:

$$-a\left[\left(t-nT-\frac{T}{2}\right)-\frac{T}{2}\right]^2+\frac{aT^2}{2}+$$

$$+n\frac{aT^2}{2}=-a\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]^2+$$

$$+aT\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]-\frac{aT^2}{4}+$$

$$+\frac{aT^2}{2}+n\frac{aT^2}{2}=-a\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]^2+$$

$$+aT\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]+\frac{aT^2}{4}(2n+1),$$

то уравнение пути можно записать так:

$$S(t)=(-1)^m a\left(t-m\frac{T}{2}\right)^2+$$

$$+\frac{1-(-1)^m}{2}aT\left(t-m\frac{T}{2}\right)+m\frac{aT^2}{4},$$

$$t\in\left[m\frac{T}{2},\ (m+1)\frac{T}{2}\right],\ m=0,1,2,\ldots$$

Упражнения

1. Напишите уравнения линий, изображенных на рисунках 5, 6 и 7. Для линии, показанной на рисунке 5, приведите уравнения функций, определенных в точках $t=n\pi$ слева и справа.

2. «Двухтактное» (двухполупериодное) выпрямление переменного тока осуществляется с помощью схемы с двумя электронными лампами-диодами. Если положительные полупериоды тока пройдут через один диод, а отрицательные — через другой, то осциллограмма напряжения будет иметь вид линии, изображенной на рисунке 8. Найдите уравнение этой линии.

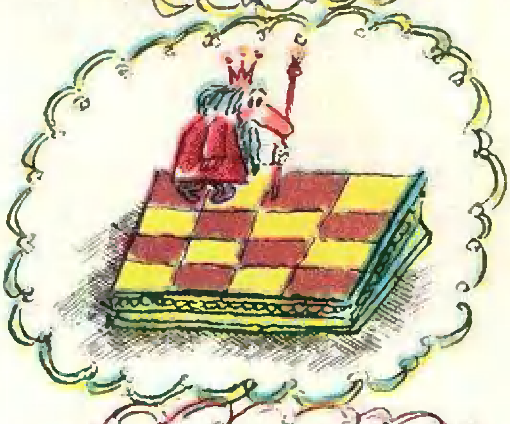
3. Однополупериодное выпрямление переменного тока можно осуществить с помощью схемы с одним диодом. Тогда полупериоды одного знака проходят через диод, а полупериоды другого знака не проходят. Осциллограмма напряжения изображена на рисунке 9. Найдите уравнение этой функции.

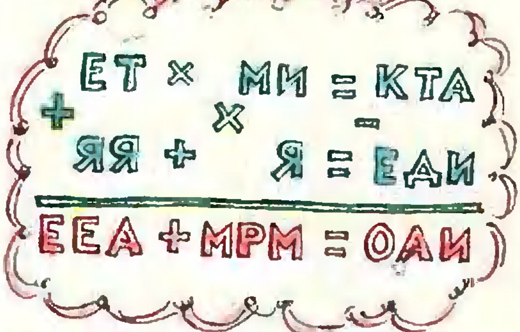
4. Сконструируйте уравнение функции, график которой (см. рис. 4) на участках $[nT, (n+1)T]$, $n=0, 1, 2, \ldots$ конгруэнтен графику функции

$$y=A\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

«Квант» для младших школьников

Задачи





Рисунки Э. Назарова

1. В ста ящиках было по одинаковому количеству деталей. Когда из первого ящика взяли несколько деталей, из второго в два раза больше, из третьего в три раза больше и так далее, то в последнем ящике осталась одна деталь, а во всех ста вместе — 14950. Сколько деталей было в каждом ящике первоначально?

2. Как известно, моря все время пополняются пресной водой рек. Однако соленость морской воды при этом не уменьшается. Почему?

3. Король обошел шахматную доску размером 4 × 4 и вернулся на исходное поле, побывав на каждом поле один раз.

Какое наименьшее число прямых (не диагональных) ходов он мог сделать?

4. Вместо букв на рисунке надо подобрать цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры), чтобы выполнялись все указанные соотношения.

5. Вася на вопрос, каков номер его квартиры, ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то половина полученной суммы составит как раз номер моей квартиры.

В какой квартире живет Вася?

О системах счисления

Дорогой Сережа!

Помнишь нашу встречу в Батуми? В беседе со мной ты признался, что собираешься стать космонавтом. На мое замечание, что для достижения этой цели тебе нужно будет усердно заниматься, основательно выучить биологию, химию, физику, математику, ты ответил очень оригинально — начал демонстрировать свои познания. Оказалось, что математику ты знаешь отлично, даже любишь ее. И тогда я решил задать тебе «каверзный» вопрос: «почему верно равенство $7+8=15$ и может ли быть верным равенство $7+8=16$?»

Ты был немало удивлен, даже както растерян, но вскоре нашелся и ответил: «потому, что $7+8=15$, а равенство $7+8=16$ — неверное!». Было заметно, что ты сам не удовлетворен своим ответом. Я собирался объяснить, в чем тут дело, но, к сожалению, у нас не было возможности продолжить беседу, и я обещал тебе написать на эту тему письмо в «Квант», который ты, так же как и я, очень любишь. Выполняю свое обещание. Итак, первый вопрос.

Почему верно равенство $7+8=15$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно выяснить, что подразумевается под записью «15». Такая запись, как ты отлично знаешь, означает, что в этом числе 1 десяток и 5 единиц. Иными словами, 15 — это сумма $1\times 10+$

$+5\times 1$. Аналогично 287, например, есть сумма $2\times 100+8\times 10+$ $+7\times 1$. Последней сумме можно придать более удобную, как бы более симметричную форму:

$$2\times 10^2+8\times 10^1+7\times 10^0.$$

Ты, конечно, знаешь, что первая степень любого числа равна самому числу, поэтому вместо 10 мы можем написать 10^1. Что же касается последнего слагаемого, то скажу тебе, что любое отличное от нуля число в нулевой степени принято считать равным единице. В частности, $10^0=1$, и единицу мы можем заменить на 10^0. В данном случае это очень удобно.

Итак, имеем:

$$15=1\times 10^1+5\times 10^0,$$
$$287=2\times 10^2+8\times 10^1+7\times 10^0.$$

Обрати, пожалуйста, внимание на расположение цифр данных чисел в правых частях этих равенств.

Вот еще два примера:

$$1975=1\times 10^3+9\times 10^2+$$
$$+7\times 10^1+5\times 10^0,$$
$$2\,904\,770=2\times 10^6+9\times 10^5+$$
$$+0\times 10^4+4\times 10^3+7\times 10^2+$$
$$+7\times 10^1+0\times 10^0.$$

Попробуй записать в такой же форме следующие числа: 103 009, 222 669, 23 456 789.

Возможность представления чисел в виде таких сумм позволяет записывать числа, даже очень большие, всего десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При такой записи особую роль играет число д е с я т ь. Поэтому эта система записи чисел называется д е с я т и ч н о й, а число десять — о с н о в а н и е м этой системы. Вторым важным моментом такой записи является то, что значение каждой цифры определяется не только ею самой, но и местом (п о з и ц и е й), которое она занимает в записи данного числа. Например, цифра 2 в записи числа 325 «стóит» в десять раз дороже, чем такая же цифра в записи числа 872, так как означает десятки, а не единицы. Ввиду этого такую систему записи называют еще и п о з и ц и о н н о й.

Итак, при записи чисел мы пользуемся д е с я т и ч н о й п о з и ц и о н н о й с и с т е м о й с ч и с л е н и я. Именно поэтому и верно равенство $7+8=15$.

Перейдем к следующему вопросу.

Может ли быть верным равенство 7+8=16?

Ты, Сережа, конечно же хорошо понимаешь, что в десятичной системе это равенство быть верным не может. Но десятичная система не единственно возможная! Вовсе не обязательно, чтобы основание системы равнялось десяти — за основание можно взять любое натуральное число (даже единицу). Рассмотрим, к примеру, с е м е р и ч н у ю систему счисления.

В с е м е р и ч н о й системе за основание принято число с е м ь, и для записи чисел в этой системе достаточно всего семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Само число с е м ь, основание системы запишется как 10 (это характерно для любой системы — основание системы в ней записывается как 10). Число восемь в семеричной системе записывается как 11, потому что $8=1\times 7^1+1\times 7^0$, девять — как 12, десять — как 13, а число четырнадцать запишется как 20. Число сорок девять в этой системе имеет вид 100 ($100=1\times 7^2+0\times 7^1$ $+0\times 7^0$).

Все это может показаться странным и трудным, но на самом деле здесь все естественно и даже легко, главное — хорошо понять эту своеобразную арифметику и привыкнуть к ней. Обычно, когда рассматривают числа в разных системах счисления, у каждого числа ставят индекс — основание системы счисления, в которой это число записано. Тогда рассмотренные нами примеры можно записать так:

$$7_{10}=10_7,\ 8_{10}=11_7,\ 9_{10}=12_7,$$
$$10_{10}=13_7,\ 14_{10}=20_7,\ 49_{10}=100_7.$$

Читаются эти равенства следующим образом: «семь десятичное равно десяти семеричному» и т. д.

Предлагаю тебе в качестве упражнения доказать истинность следующих равенств: $2_7+6_7=11_7$, $4_7+5_7=12_7$, $11_7+16_7=30_7$, $3_7^2=12_7$, $4_7\times 6_7=33_7$, $101_7:34_7=2_7$.

Попробуй также составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в семеричной системе счисления.

А теперь попытаемся выяснить, в какой же системе может быть верным равенство

$$7+8=16.$$

Думаю, ты сам уже сообразил, что основанием этой системы должно быть такое число a, которое, сложенное с шестью единицами, в сумме дает пятнадцать. В самом деле, ведь 16_a означает сумму $1\times a^1+6\times a^0$, т. е. $16_a=a_{10}+6_{10}$. С другой стороны, $7_a+8_a=7_{10}+8_{10}=15_{10}$, и поэтому должно быть $a_{10}+6_{10}=15_{10}$. Отсюда уже нетрудно найти a — оно равно д е в я т и.

Итак, равенство $7+8=16$ верно в д е в я т е р и ч н о й системе счисления, $7_9+8_9=16_9$. Это и есть ответ на вопрос, поставленный в заголовке.

На этом, дорогой Сережа, разреши поставить точку. Правда, я собирался рассказать тебе еще о двоичной системе счисления, примечательной во многих отношениях, но думаю, будет лучше, если мы о ней поговорим в следующий раз, а пока я советую тебе посмотреть книгу С. В. Ф о м и н а «Системы счисления» (серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1975).

Желаю успеха! До новых встреч на страницах «Кванта».

P. S. Если тебе что-нибудь покажется неясным, напиши, я с удовольствием отвечу.

А. Д. Бендукидзе

Несколько задач о гипоциклоидах

З а д а ч а 1. *Докажите, что при $k=2$ гипоциклоиды*) являются диаметрами неподвижного круга (теорема Насреддина — Коперника — Феррари).*

Красивый геометрический факт из этой задачи не очень легко представить наглядно. Он служит источником многих популярных геометрических задач.

Пусть, например, концы отрезка AB скользят по прямым, пересекающимся в точке O. Если вовлечь в это движение точки всей плоскости (считая ее твердой пластиной), то (в силу задачи 1) мы получим то же движение, что и при качении круга, ограниченного окружностью, описанный вокруг треугольника AOB, по внутренней стороне окружности с центром в точке O вдвое большего радиуса.

З а д а ч а 2. *Найдите траектории, по которым при описанном движении будут двигаться:*

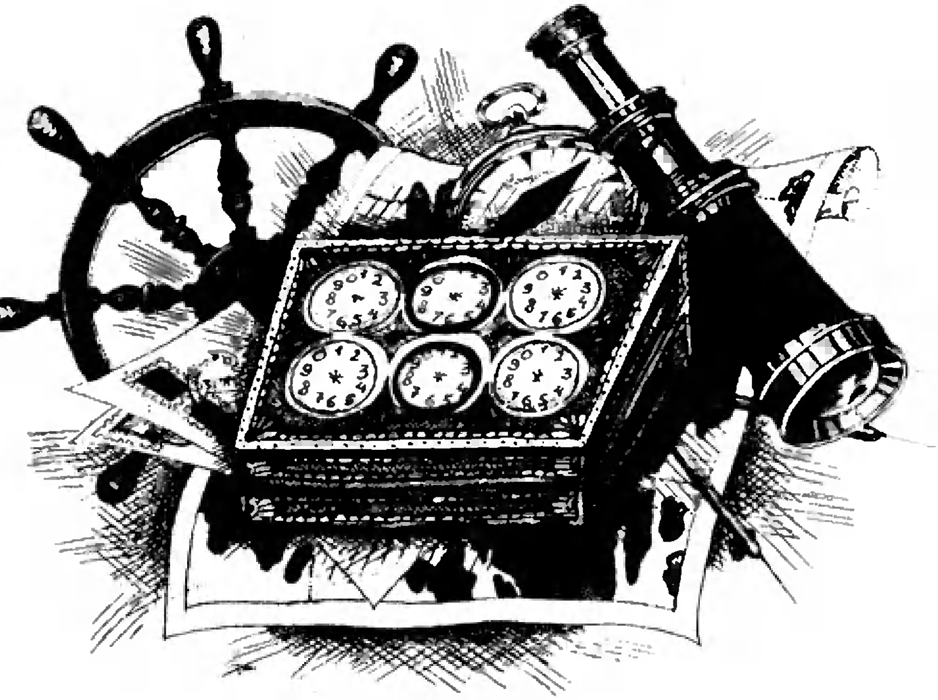
а) *центр окружности, описанной вокруг треугольника AOB;*

б) *точка C, такая, что O и C находятся по разные стороны отрезка AB и $\widehat{ACB}+\widehat{AOB}=\pi$.*

Гипоциклоида при $k=4$ называется *астроидой.*

З а д а ч а 3. *Проведем диаметры неподвижного круга (радиуса R) через вершины астроиды. Возьмем произвольную точку астроиды B и проведем касательную к ней в этой точке до пересечения с диаметрами в точках E и F. Докажите, что длина отрезка EF не зависит от выбора точки B и равна R.*

*) Определение гипоциклоиды см. в статье С. Г. В е р о в а «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5, с. 30.



Подарок веселого капитана

Это был новогодний сюрприз, присланный капитаном дальнего плавания своему сыну, — шкатулка, которая открывается только после того, как с помощью шести дисков с полным комплектом цифр на каждом будет набрано некоторое кодовое шестизначное число вида ****0*. Пятая цифра известна — нуль, а все остальные цифры зашифрованы звездочками.

В сопроводительном письме сыну капитан написал: «. . . Кодовое число одновременно указывает и величину содержимого (в рублях) шкатулки. Возьми себе $\frac{1}{**}$ часть денег на книги и каникулярные развлечения, а остальные отдай маме на хозяйственные расходы. Когда содержимое шкатулки (число ****0*) будешь делить на знаменатель указанной дроби (**), то в частном получишь четырехзначное число, а процесс деления будет иметь такой вид:

```
****0* | **
 **    |****
 ---
 **3
 **1
 ---
  2*
  2*
  --
   0
```

Если проявишь находчивость и остроумие, то, расшифровав указанную операцию деления, найдешь и кодовое число, открывающее шкатулку...»

Все одноклассники сына капитана дальнего плавания включились в поиски «изюминки», заложенной веселым капитаном в задачу. Пока, увы, — безуспешно. Более того, многие пришли к заключению о неправильности в записи действий. Некоторые, впрочем, полагали, что «изюминка» — в преднамеренно допущенной описке, которую и надо выявить. Например, не лишний ли «хвостик» у двойки? Если его убрать, то на месте двойки окажется девятка, и тогда удается найти даже два решения. Одно из них — (1), какое второе?

```
101 409| 33              ****,* | **
 99    |3 073            **     |***,*
 240                      ***
 231            (1)       **1           (2)
   99                      **
   99                      2*
    0                       0
```

Другая версия «описки» исходила из предположения, что нуль в качестве пятой цифры нужен только для набора кодового числа, в действительности он маскирует запятую в записи числа. Если этот нуль в записи делимого заменить запятой, а оставшиеся звездочки сблизить, то получится деление десятичной дроби на целое число, и запись действий принимает вид (2).

Сторонники этой версии нашли два варианта расшифровки приведенной записи. Какие?

К сожалению, ни одно из четырех решений, найденных ребятами, не открыло шкатулки.

В посылке капитана был еще один листок. Капитан писал сыну, что их штурман, который, кстати, помог сделать шкатулку, показывает своим товарищам забавный «числовой фокус»: он четыре раза складывает одинаковые числа и каждый раз получает новый результат:

```
 267     267     267     267
+267    +267    +267    +267
 534     545     556     512
```

При этом штурман клянется, что суммы найдены честно и безошибочно. Весь класс до сих пор не раскрыл «секрет» этого фокуса и задачи капитана.

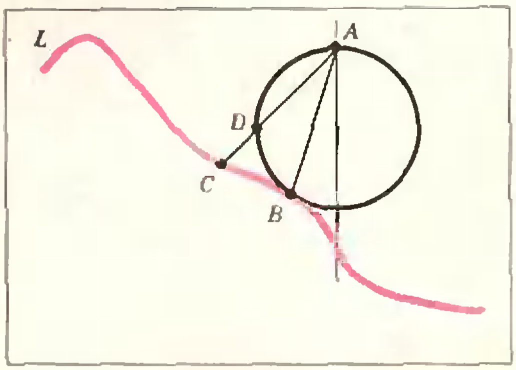
Б. А. Кордемский

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Тайны циклоиды»
Решения задач Галилея

З а д а ч а 1. Материальная точка под действием силы тяжести движется по хорде, составляющей угол α с вертикальным диаметром (длины d) окружности р а в н о у с к о р е н н о с ускорением $g\cos\alpha$ (движущая сила — проекция силы тяжести точки на хорду), длина хорды (оканчивающейся в нижней точке окружности) равна $d\cos\alpha$. Поэтому материальная точка при движении по любой хорде, оканчивающейся в нижней точке окружности, затрачивает то же время, что при свободном падении из верхней точки окружности — по вертикальному диаметру.

З а д а ч а 2. Проведем через точку A вертикаль. Рассмотрим наименьшую окружность, проходящую через точку A, с центром на построенной вертикали, и касающуюся кривой L в некоторой точке B (см. рисунок; точка A будет «верхней» или «нижней» точкой окружности). Для «хорошей» кривой такая окружность определена; для простоты будем считать, что окружность касается L в е д и н с т в е н н о й точке — B. Точка B — искомая точка. В самом деле, пусть C — любая точка кривой L, отличная от B. Соединим точку C с точкой A; пусть D — точка пересечения отрезка AC с окружностью. При движении из точки A в точку C материальная точка затрачивает время на прохож-



дение двух отрезков: отрезка AD (равное времени прохождения отрезка AB — см. задачу 1), и отрезка DC; поэтому при движении до точки касания B (указанной окружности и кривой L) время минимальное.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», № 7)

1. 4 стула, 3 табуретки. Указание. Задача сводится к решению в целых числах уравнения $4x+3y+2(x+y)=39$, т. е. $6x+5y=39$, откуда $x+5(x+y)=39=4+5\times7$.

2. Нужно проследить за пузырьками воздуха, выходящего из аппарата, обеспечивающего дыхание; можно уронить какой-нибудь тяжелый предмет.

3. Если от двузначного числа отнять двузначное число, образующееся после перестановки его цифр, то получится $9k$, где k — разность между первой и второй цифрой этого числа. Если $k<8$, то можно назвать не одно двузначное число, дающее в результате описанного вычитания требуемый результат (номер дома). В этом случае Владимир не мог бы решить задачу Николая. Значит, $k=8$, и тогда искомое число равно 91, а номер дома Николая равен 72.

4. Площадь поверхности, с которой происходит испарение, увеличивается. Сено высыхает равномернее и быстрее.

5. $9+8+7+65+4+3+2+1=99$, $9+8+7+6+5+43+21=99$. Указание. Надо последовательно находить места, где необходимо ставить знак плюс. Ясно, что в сумму должны входить однозначные и двузначные числа, но 98 брать нельзя, 87 тоже, так как сумма остальных чисел больше 12 и т. д.

К чайнворду

(см. «Квант», № 7, 4-я с. обл.)

1. Алгебра. 2. Анализ. 3. Зет. 4. Тангенс. 5. Сектор. 6. Радиан. 7. Неравенство. 8. Объем. 9. Максимум. 10. Множество. 11. Отрезок. 12. Конус. 13. Слагаемое. 14. Евклид. 15. Додекаэдр. 16. Радикал. 17. Лейбниц. 18. Цилиндр. 19. Радиус. 20. Сегмент. 21. Тождество. 22. Ортоцентр. 23. Ромб. 24. Бином. 25. Минута. 26. Аксиома.

К геометрическим неравенствам

(см. «Квант», № 7, с. 65)

1. Воспользоваться неравенством $m_a+m_b+m_c<a+b+c$ и тождеством

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Для доказательства левой части неравенства использовать тот факт, что $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$ и что из медиан можно составить треугольник.

2. С помощью тождеств $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ и $ch_c=ab\sin C$ доказать, что $a^2+b^2-h_c^2\leqslant\frac{a^2b^2}{h_c^2}=4R^2$.

3. Воспользоваться соотношениями вида $\cos\frac{A}{2}=\frac{w_a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ и неравенствами $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Для доказательства второго неравенства использовать неравенство $\cos\frac{A}{2}\geqslant\frac{2w_a}{b+c}$ и т. п.

К алгебраическим задачам

(см. «Квант», № 7, с. 20)

1. Раскрыть скобки и применить теорему Виета.

$$x^{17}-1=(x-1)[x^8-ax^7+(2-a)x^6-(3a-2)x^5+(10-a)x^4-(3a-2)x^3+(2-a)x^2-ax+1][x^8-bx^7+\ldots+1].$$

2. Искомое уравнение имеет вид

$$x^3-9cx^2+(b^2+27c^2)x-c(4b^3+27c^2)=0.$$

3. Положить $x-1=\rho$ и воспользоваться формулой бинома Ньютона.

4. Перемножая, получаем $(x+y)(x+z)\times(y+z)=\pm abcxyz$, откуда $\frac{ax}{y+z}=\pm1$. Значит, $y+z=\pm ax$, $z+x=\pm by$, $x+y=\pm cz$. Исключая x, y, z, получаем искомые равенства $a+b+c\pm2=abc$.

Корректор В. П. Сорокина

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/VI-75 г. Подписано в печать 9/VII-75 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,56 Т-09257
Цена 30 коп. Заказ 1035. Тираж 348 120 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

«КУЛИНАРНАЯ ГОЛОВОЛОМКА» СЭМА ЛОЙДА

Сэм Лойд (1841—1911) — на редкость изобретательный американский конструктор головоломок. Им опубликованы тысячи занимательных задач, главным образом, математических и шахматных. Он сам оформлял свои произведения, а некоторые даже собственноручно набирал и печатал. Головоломка, которую мы сейчас помещаем, публиковалась в книге «Sam Loyd's Puzzles», вышедшей на родине автора, в Филадельфии, спустя год после его кончины.

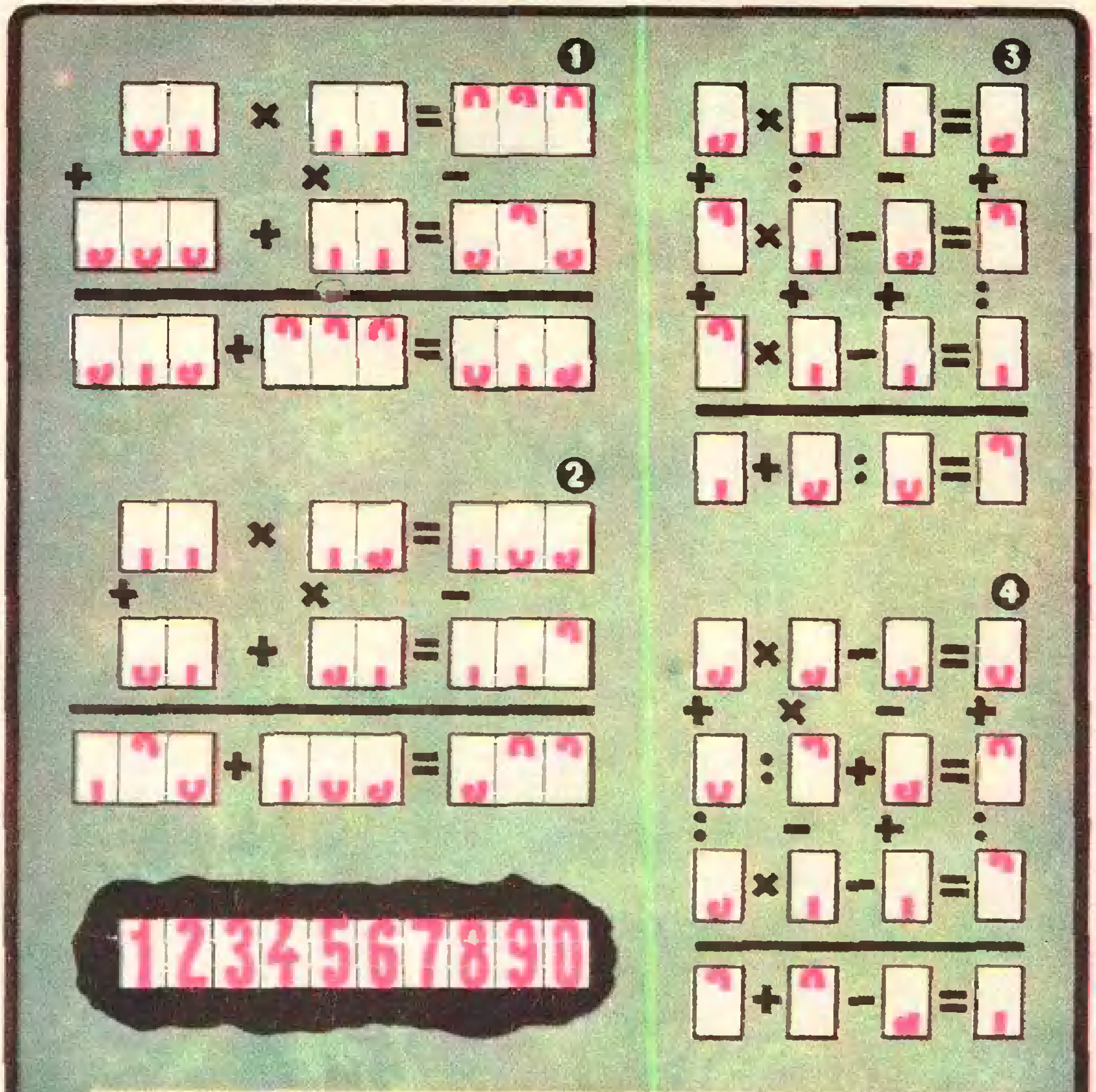
КАК РАЗДЕЛИТЬ СЫР?

Опытный шеф-повар умеет разделить такой цилиндрический кусок сыра на максимальное число частей пятью прямыми разрезами. Но сколько у него при этом получается кусков, он держит в секрете. Попытайтесь разгадать этот секрет.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

8

ГОЛОВОЛОМКИ



Допишите «хвостики» и «петельки» до цифр так, чтобы выполнялись все указанные действия. Образец написания цифр приведен на рисунке.

Действия в примерах надо производить последовательно сверху вниз и слева направо, а не по обычно принятому «старшинству».

Л. П. Мочалов